IGOR PIERIN

Hedge estático de opções com barreira

São Paulo
2022

IGOR PIERIN

Hedge estático de opções com barreira

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Educação Continuada da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo no MBA em Engenharia Financeira.

Orientador:
Prof. Dr. Andre Catalão

São Paulo
2022

SUMÁRIO

Resumo

Abstract

1 Introdução **6**

1.1 Objetivo 8

1.2 Organização do trabalho 9

2 Modelagem das opções com barreira **10**

2.1 Modelo de Black e Scholes (1973) 10

2.2 Opções com Barreira 12

2.2.1 Paridade In-Out 16

2.3 Estratégias de Hedge 16

2.3.1 Hedge Estático 16

2.3.1.1 Opções *call down-and-in,* $K > H$ 18

2.3.1.2 Opções *call down-and-in,* $K < H$ 24

2.3.1.3 Opções *call up-and-out,* $K < H$ 30

2.3.2 Hedge Estático com Regressão 35

2.3.2.1 Opções *call up-and-out* 36

2.3.2.2 Opções *call down-and-out* 39

3 Aplicações **40**

4 Conclusões **55**

Referências **58**

RESUMO

No mercado de instrumentos derivativos, contratos de opções com barreira diferem de contratos *vanillas* por sua dependência com a trajetória que o ativo-objeto segue ao longo do tempo do contrato. A proteção (*hedge*) do preço de um contrato de barreira sob variações de mercado de seus fatores de risco somente pode ser estabelecida via opções *vanillas.* Este trabalho analisa dois procedimentos que pertencem à categoria de *hedge estático*, ou seja, aquele em que a quantidade necessária à proteção é estabelecida no início da operação e não é mais revisada. Estes procedimentos são encontrados em Albanese e Campolieti [1] e Carr e Chou [2, 3]. No primeiro, uma regressão linear determina as quantidades necessárias, e independe do modelo de apreçamento; enquanto noutro o balanceamento envolve o modelo adotado e sua metodologia advém do Teorema de Fubini. Ao final, as duas estratégias de *hedge* estático são comparadas e são extraídas algumas conclusões.

ABSTRACT

In the derivatives market, barrier contracts are different from vanilla ones because the contract depends on the path followed by the underlying. The hedge of the barrier options' risks can only be established via vanilla options. In this work, two methodologies are analysed concerning static hedging, in which quantities are determined at the beginning of the period, and kept constant afterwords. The algorithm can be found in the Albanese and Campolieti [1] and Carr and Chou [2, 3]. In the first, the vanillas quantities are determined by a linear regression, and are independent of the pricing model, while in the second strategy the quantities depend on the pricing model, and the methodlogy is based in the Fubini´s theorem. At the end, the two strategies of the static heding are compared and some conclusions are extracted.

1 INTRODUÇÃO

No mercado financeiro, um instrumento derivativo é assim denominado devido ao fato de seu preço depender do preço de um outro ativo, o chamado ativo-objeto ou ativo subjacente. Um exemplo é o contrato de opção, que representa o direito de comprar ou vender determinado ativo a determinado preço até uma data específica.

Por ser uma opção de compra ou venda, esse tipo de contrato fornece ao possuidor da opção o direito, e não o dever, de exercer a cláusula na data pré-estabelecida. Ou seja, na data de exercício (que pode ser a data de vencimento) da opção, o exercício do direito consiste no possuidor do contrato de opção de compra (venda), ou *call* (*put*), poder comprar (ou vender) o ativo subjacente no valor pré-estabelecido (também conhecido como preço de exercício ou *strike*) na data de emissão, ou início do contrato.

As opções europeias podem ser exercidas somente na data de vencimento, enquanto que as opções americanas podem ser exercidas em qualquer data [4], entre a emissão do contrato e o vencimento.

Para adquirir uma opção de compra ou de venda, o adquirente deve pagar um prêmio ao lançador da opção.

Na data de vencimento da opção só vale a pena exercê-la se ela garantir um preço da ação melhor que o de mercado. A diferença entre o valor de mercado e o preço garantido pela opção é denominado de valor intrínseco (VI). E a diferença entre o valor do prêmio e o valor intrínseco é denominado de valor extrínseco (VE).

Dependendo do valor do ativo subjacente em um dado momento, as opções são classificadas em três categorias: (i) as opções de compra (venda) dentro do dinheiro (*in the money*) são quando o preço de exercício é menor (maior) que o preço da ação; (ii) as opções no dinheiro (*at the money*) são quando o preço de exercício está em torno do preço da ação; (iii) as opções de compra (venda) fora do dinheiro (*out the money*) quando o preço de exercício é superior (inferior) que o preço da ação.

Desta maneira, há uma relação direta entre o valor da opção e o valor do ativo-objeto. Desconsiderando o tempo para o vencimento da opção de compra (venda), quanto maior (menor) o valor do preço do ativo subjacente, maior o valor da opção.

Por outro lado, quanto maior (menor) o preço de exercício da opção de compra (venda) menor o valor da opção, independentemente do valor do ativo-objeto. O valor das opções muito fora do dinheiro tende a zero, especialmente próximo à data de vencimento.

Um outro fator que influencia o valor das opções é o tempo de expiração. Quanto menor o prazo para o vencimento da opção menor seu valor extrínseco.

A volatilidade se refere às variações (positivas ou negativas) de preço do ativo subjacente à opção. Quanto maior a movimentação de preços (ou seja, maior a volatilidade), justificam-se maiores preços das opções, pois o risco da opção ser exercida torna-se maior. Por não ser um observável, a volatilidade é chamada de *volatilidade implícita*.

Por último, as taxas de juros influenciam pouco os preços das opções, porém o valor das opções de compra tende a subir com o aumento das taxas de juros, pois os juros de mercado estão incluídos nos prêmios da opção.

As opções de compra e de venda europeias e americanas têm padrões contratuais bem estabelecidos em bolsas de valores. Neste caso, seus preços são públicos e negociados por agentes econômicos (corretores, bancos, pessoas físicas, entre outros). Devido aos padrões bem conhecidos, estes produtos são conhecidos por *plain vanilla* [4].

No entanto, a engenharia financeira desenvolve produtos de opções que não seguem padrões e são conhecidos como produtos exóticos. Esses produtos são desenvolvidos por diferentes motivos, que podem ser para atender uma necessidade de proteção (*hedge*) real de mercado, ou por motivos fiscais, contábeis, legais ou regulatórios mais atraentes.

Dentre os vários tipos de opções exóticas existentes, as opções com barreiras são o objeto de estudo deste trabalho. Estas opções dependem da trajetória do ativo-objeto, pois incluem cláusulas de ativação ou desativação de acordo com eventos de passagem do preço do ativo pela barreira (um nível de preço pré-estabelecido).

Uma questão importante é a proteção (*hedge*) deste tipo de contrato sob variação dos parâmetros que influenciam seu preço. A dificuldade é que ativos que são usados para a proteção não contêm as características deste contrato (em especial, a barreira). Então, há que se buscar estratégias e combinações de produtos cujos preços repliquem o preço da barreira. Segundo [5], há dois tipos de hedge: (i) o estático e (ii) o dinâmico.

O hedge estático é uma estratégia em que são utilizados instrumentos financeiros, tais

como, opções *vanilla*, futuro e valores em caixa, para replicar as variações de preço de contratos derivativos durante toda a vigência dos mesmos. Devido à natureza de replicação, não é necessário efetuar o rebalanceamento dos instrumentos de hedge, apresentando uma facilidade no gerenciamento e um menor custo operacional. Maiores detalhes sobre hedge estático podem ser vistos em [1, 2, 5].

Por meio do princípio de não arbitragem, que estabelece que se dois instrumentos distintos possuem o mesmo valor intrínseco, necessariamente, eles possuem o [6] mesmo valor financeiro, [7] estendeu o modelo de [6] para opções com barreira simples. Essa metodologia replica o valor intrínseco da opção com barreira simples, por meio de uma posição comprada e outra vendida em uma opção *plain vanilla* com preço de exercício igual ao valor da barreira.

O *hedge* dinâmico [8] consiste em uma replicação dinâmica de um derivativo, utilizando uma carteira autofinanciável, composta pela combinação do ativo subjacente do derivativo e de um ativo livre de risco. Diferentemente do hedge estático, sempre que houver alteração nas características da exposição de riscos dos derivativos, a carteira autofinanciável deve ser rebalanceada de forma a neutralizar o risco.

Um estudo em mercados com regime de volatilidade menos regulares foi desenvolvido em [9], e os autores concluíram que o *hedge* estático pode ser ineficiente nestes mercados. Em mercados desenvolvidos, [10] concluíram que o *hedge* estático pode ser mais eficiente do que o *hedge* dinâmico para carteiras com opções exóticas.

1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é estudar os mecanismos de proteção de opções de barreira por meio de duas estratégias de *hedge* estático já abordadas nos trabalhos de [1–3]. Frente à estratégia de *hedge* dinâmico, [5] ressalta que a de hedge estático incorre em menores custos de rebalanceamento. Entretanto, pode levar a uma maior imprecisão na proteção.

Na abordagem de [1], a opção com barreira pode ser protegida com n opções *plain vanillas*, cujos preços de exercício são tomados próximos ao valor da barreira, e seus vencimentos estão no intervalo de tempo determinado pelo vencimento do contrato de opção com barreira. As quantidades das *vanillas* são estabelecidas por regressão linear.

Por outro lado, [2, 3] estabeleceram que é possível estruturar uma composição de opções *plain vanilla* europeias que tem comportamento semelhante à dinâmica de uma opção com barreira. Esta abordagem depende do modelo adotado para o apreçamento dos derivativos (opção

com barreira e opções *vanillas* envolvidas no *hedge*).

Assim, pretende-se analisar os dois procedimentos quanto às suas capacidades de proteção de contratos de barreira sob variações do ativo-objeto e demais fatores de risco, tais como: volatilidade, tempo e juros.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, incluindo esta introdução. No capítulo 2 são apresentados o modelo de apreçamento de opções e as estratégias de proteção de opções com barreira propostas por [1–3]. No capítulo 3 são aplicados os modelos de proteção discutidos para as opções brasileiras. E, finalmente, no capítulo 4 são tecidas algumas conclusões e recomendações para o hedge de opções com barreiras.

2 MODELAGEM DAS OPÇÕES COM BARREIRA

Este capítulo inicia-se com um breve resumo do modelo de [6] para o apreçamento de opções. Em seguida, apresentam-se as estratégias de proteção para as opções com barreira.

2.1 Modelo de Black e Scholes (1973)

O modelo de apreçamento de opções de [6] é amplamente utilizado, devido ao fato de permitir uma equação solução fechada para o problema e sua simplicidade de implementação. Porém o modelo admite algumas hipóteses que nem sempre podem ser verificadas no mercado: (i) o preço da ação segue um movimento Browniano geométrico; (ii) inexistência dos custos de transação e impostos; (iii) o mercado de ações funciona no tempo continuo; (iv) a taxa de juros livre de risco é constante em todo o prazo de vida da opção; (v) não há restrições de venda a descoberto; (vi) a ação não rende dividendos e (vii) a opção é do tipo europeia.

Da hipótese (i), o preço da ação ao longo do tempo S(t) pode ser escrita por meio da equação:

$$dS = rSdt + \sigma SdW_t \tag{1}$$

Na equação (1), *r* é a taxa livre de risco, *t* é o tempo, σ é a volatilidade da ação e W_t é o movimento browniano, ou processo de Wiener.

Supondo que f seja o preço de um derivativo dependente de S e, consequentemente, uma função continua de S e t, tem-se do lema de Itô [11] a relação:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma SdW_t \tag{2}$$

Definindo-se um portifólio em que o titular tem posição vendida de um derivativo f e comprada em uma quantia de $\frac{\partial f}{\partial S}$ ações tem-se que

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \tag{3}$$

Uma variação infinitesimal no valor do portifólio é representada por

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \tag{4}$$

Substituindo (1) e (2) em (4) chega-se à

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \tag{5}$$

Observa-se que a equação (5) não envolve a fonte de incerteza devido ao movimento browniano. Além disso, o portifólio deve obter instantaneamente a mesma taxa de retorno que outros títulos livres de risco no curto prazo, de modo a não haver arbitragem. Assim, pode-se escrever a expressão

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{6}$$

Substituindo as equações (3) e (5) em (6), obtém-se a equação diferencial parcial de Black-Scholes-Merton dada pela equação:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 - rf = 0 \tag{7}$$

A equação diferencial (7) apresenta diversas soluções para os inúmeros derivativos existentes. Aplicando-se as condições de contorno que representam uma opção de compra (*call*), dadas pelas relações (8), chega-se ao preço de uma *call* europeia (*plain vanilla*), conforme a equação (9).

$$\begin{cases} f(S,t) = \max(S - K, 0) & t = t \\ f(S,t) \to S & t \to \infty \\ f(0,t) = 0 & \forall t \end{cases} \tag{8}$$

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \tag{9}$$

Na equação (9), S é o valor da ação (*spot*), K é o preço de exercício, d_1 e d_2 são fornecidos por

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned} \tag{10}$$

A função $N(x)$ é a densidade acumulada da probabilidade da distribuição normal padrão, dada pela equação

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{11}$$

Como a equação (11) não tem solução analítica, [12] apresenta uma aproximação para o cálculo desta integral.

Por meio da paridade *call-put*, o preço da opção de venda (*put*) europeia é dada pela equação

$$P = -SN(-d_1) + Ke^{-rT}N(-d_2) \tag{12}$$

2.2 Opções com Barreira

O resultado (*payoff*) deste tipo de opção depende do preço do ativo subjacente alcançar um determinado preço (barreira) em um determinado período de tempo [4]. Estas opções podem ser ativadas (*knock-in*) ou desativadas (*knock-out*) quando o preço de um determinado ativo, índice ou taxa alcança o valor da barreira. A mais simples e usual opção com barreira é aquela onde este ativo é o próprio ativo subjacente da opção. Quando estes ativos são diferentes, as opções são denominadas de *outside barrier options* [13].

Existem oito tipos de opções com barreira [4], classificados segundo o tipo de exercício (compra ou venda), a natureza da barreira quanto ao evento de ativação ou desativação (*in* ou *out*) e sua localização em relação ao preço inicial do ativo subjacente (*up* ou *down*). Os tipos de opções de barreira de compra e de venda estão relacionados na Tabela 1. Na tabela, S representa o preço do ativo subjacente, H é a barreira e K o preço de exercício; enquanto ϕ representa se a opção é de compra (assume valor 1) ou venda (assume valor -1).

Tabela 1: Opções com barreira: compra (*call*), se $\phi = 1$; e venda (put), se $\phi = -1$. Adaptada de [14].

Natureza	Localização da barreira	*Payoff* no vencimento
In	*Up* $(H > S_0)$	$Max\left(\phi\left(S-K\right),0\right)$, se $S_t \geq H$, para algum $t \leq T$
	Down $(H < S_0)$	$Max\left(\phi\left(S-K\right),0\right)$, se $S_t \leq H$, para algum $t \leq T$
Out	*Up* $(H > S_0)$	$Max\left(\phi\left(S-K\right),0\right)$, se $S_t < H$, para todo $t \leq T$
	Down $(H < S_0)$	$Max\left(\phi\left(S-K\right),0\right)$, se $S_t > H$, para todo $t \leq T$

Segundo [15], as opções com barreira podem ter um valor de rebate[1] se a barreira for atingida.

Com base nas mesmas hipóteses do modelo de Black-Scholes, [16] desenvolveram equações para a apreçamento de opções com barreira em função dos parâmetros *A, B, C* e *D* definidos a seguir.

O fator A equivale a uma *plain vanilla* europeia com preço de exercício K:

$$A = \phi S N\left(\phi d_1\right) - \phi K e^{-r\tau} N\left(\phi d_2\right) \tag{13}$$

O fator B equivale a uma *plain vanilla* europeia com preço de exercício equivalente à barreira H:

$$B = \phi S N\left(\phi d_3\right) - \phi K e^{-r\tau} N\left(\phi\left(d_3 - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right) \tag{14}$$

onde,

[1] Taxa de rebate é um valor pré estabelecido que o comprador receberá caso haja desativação nas opções do tipo *out,* ou nunca for ativada, no caso das opções do tipo *in*.

$$d_3 = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{15}$$

O fator C equivale a uma *plain vanilla* europeia com preço de exercício K, condicionada ao atingimento da barreira H:

$$C = \phi S \left(\frac{H}{S}\right)^{2(\mu+1)} N\left(\eta d_4\right) - \phi K e^{-r\tau} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N\left(\eta\left(d_4 - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right) \tag{16}$$

onde,

$$d_4 = \frac{\ln\left(\frac{H^2}{SK}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{17}$$

O fator D equivale a uma *plain vanilla* europeia com preço de exercício equivalente à barreira H, condicionada ao atingimento da barreira H:

$$D = \phi S \left(\frac{H}{S}\right)^{2(\mu+1)} N\left(\eta d_5\right) - \phi K e^{-r\tau} \left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N\left(\eta\left(d_5 - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right) \tag{18}$$

onde,

$$d_5 = \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{19}$$

O parâmetro μ e o tempo τ da maturidade da opção dado pela equação (21), são dados por

$$\mu = \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} \tag{20}$$

$$\tau = T - t \tag{21}$$

, em que t é o tempo atual e T é o prazo de expiração da opção. Uma quantidade que é utilizada em [2] é

$$p = -2\mu \tag{22}$$

As variáreis ϕ e η definem o tipo de opção e barreira, respectivamente.

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{cases} +1, & \text{se opção de compra} \\ -1, & \text{se opção de venda} \end{cases} \\ \eta &= \begin{cases} +1, & \text{se barreira } \textit{down} \\ -1, & \text{se barreira } \textit{up} \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

Utilizando as condições de contorno da tabela 1 obtém-se os preços das opções com barreira, os quais podem ser sumarizados pela Tabela 2 e 3 para as opções de compra e venda respectivamente.

Tabela 2: Equaçoes de apreçamento para as opções de compra com barreira.

Natureza	Localização	Payoff
In	*Down*	C para $K \geq H$
		$A - B + D$ para $K < H$
	Up	A para $K \geq H$
		$B - C + D$ para $K < H$
Out	*Down*	$A - C$ para $K \geq H$
		$B - D$ para $K < H$
	Up	0 para $K \geq H$
		$A - B + C - D$ para $K < H$

Tabela 3: Equaçoes de apreçamento para as opções de venda com barreira.

Natureza	Localização	Payoff
In	*Down*	$B - C + D$ para $K \geq H$
		A para $K < H$
	Up	$A - B + D$ para $K \geq H$
		C para $K < H$
Out	*Down*	$A - B + C - D$ para $K \geq H$
		0 para $K < H$
	Up	$B - D$ para $K \geq H$
		$A - C$ para $K < H$

2.2.1 Paridade In-Out

A *paridade in-out* relaciona as opções que só diferem entre si pelo gatilho, *in* ou *out*, e a *vanilla* associada. Ou seja, a compra de duas opções, V_1 e V_2 , ambas de barreira H de mesma posição η, mesmo tipo ϕ, como em 23, com mesmo *strike* K, e vencimento (T), mas gatilhos *in* ou *out* diferentes equivale à compra de uma vanilla V de mesmas características. Matematicamente,

$$V_1(in, H, \eta, K, \phi, K, T) + V_2(out, H, \eta, K, \phi, K, T) = V(K, \phi, K, T) \tag{24}$$

Esta relação pode ser usada para se obter preço de uma opção *in*, quando se sabe o preço de sua análoga *out*, e vice-versa, através do uso da *vanilla* associada, cuja forma matemática é mais trivial.

2.3 Estratégias de Hedge

Neste item são apresentados duas estratégias de hedge estáticos de opções com barreira. A primeira foi proposta por [1], onde a proteção pode ser efetuada por uma combinação de várias opções *plain vanilla* com preços de exercício próximos ao valor da barreira. Na segunda abordagem, apresentada em [1–3], em que por meio de uma aproximação analítica para o valor intrínseco da opção, é possível estruturar uma composição de opções *plain vanilla* europeias que tem comportamento semelhante à dinâmica de uma opção com barreira. Esta metodologia permite diminuir os custos de *hedge*.

2.3.1 Hedge Estático

Várias fontes, dentre elas [1–3], mostram que a partir do Teorema de Fubini, o *payoff* f como função do ativo-base (S_T) na data de vencimento T, pode ser descrito conforme

$$f\left(S_T\right) = f\left(k\right) + f'\left(k\right)\left(S_T - k\right) + \int_k^{\infty} f''\left(v\right)\left(S_T - v\right)^+ dv + \int_0^k f''\left(v\right)\left(v - S_T\right)^+ dv, \tag{25}$$

onde k é uma constante arbitrária. Esta relação é usada para estruturar o *hedge* estático de *payoffs* exóticos e, em particular, como o objetivo deste trabalho, de opções com barreira [3]. Como o *hedge* consiste em replicar o preço do instrumento de *payoff* f, é necessário obter a relação entre o *payoff* , expresso por (25), e o valor presente do derivativo, dado pela relação [2]

$$E_Q\left[f\left(S_T\right)e^{-r\tau}\right] = V_0, \tag{26}$$

onde Q é a distribuição risco-neutra do ativo-base. Esta relação, aplicada a (25), resulta em (lembrando que $f\left(k\right)$ e $f'\left(k\right)$ comportam-se como constantes, dado que são aplicados a k)

$$V_0 = f\left(k\right)\cdot e^{-r\tau} + e^{-r\tau}\cdot f'\left(k\right)\cdot E\left[\left(S_T - k\right)\right] +$$

$$\int_k^\infty f''\left(v\right)e^{-r\tau}\cdot E\left[\left(S_T - v\right)^+\right]dv + \int_0^k f''\left(v\right)e^{-r\tau}\cdot E\left[\left(v - S_T\right)^+\right]dv \tag{27}$$

Pode-se reconhecer os valores presentes de *calls* e *puts*, cujos *strikes* são definidos pela variável v nas integrais desta equação. Assim, a equação é reescrita como

$$V_0 = f\left(k\right)\cdot e^{-r\tau} + f'\left(k\right)\cdot e^{-r\tau}\cdot E\left[\left(S_T - k\right)\right] +$$

$$\int_k^\infty f''\left(v\right)C(v)dv + \int_0^k f''\left(v\right)P(v)dv, \tag{28}$$

onde

$$C(v) = e^{-r\tau}\cdot E\left[\left(S_T - v\right)^+\right]$$

$$P(v) = e^{-r\tau}\cdot E\left[\left(v - S_T\right)^+\right] \tag{29}$$

A equação (28), então, expressa o valor presente V_0 do derivativo em termos (i) das quantidades $f(k)$ e $f'\left(k\right)$ aplicadas sobre um *bond zero-coupon*, que paga uma unidade monetária

[2] O leitor pode consultar [17].

em τ anos, e sobre um futuro de *strike* k, também de vencimento em τ anos, respectivamente; ambos descontados por uma taxa de juros r; (ii) um *portfolio* de *calls* e *puts* de strikes v, e quantidades $f''(v)$, conforme (29). Na prática, as integrais são convertidas em somatórios, pois não há um espectro contínuo de *strikes* de opções disponível no mercado.

A equação (28) pode ser utilizada por diferentes formas, [2, 3, 18], seja por condições de simetria entre *calls* e *puts*, seja por análise direta a partir da fórmula de apreçamento do derivativo. Por meio desta segunda abordagem, utilizando as relações de apreçamento das tabelas 2 e 3, de acordo com o caso do derivativo em análise. Nessas equações, quando o prazo ao vencimento tende a zero ($\tau \to 0$), as mesmas convergem ao *payoff* $f(S_T)$. Como (28) depende do *payoff* $f(k)$ e suas duas primeiras derivadas, $f'(k)$ e $f''(v)$, adicionalmente ao limite proposto, é necessário obter essas duas derivadas.

Portanto, esta abordagem tradicional de *hedge* estático depende do modelo adotado para o apreçamento do derivativo. O *portfolio* de *hedge* tem as quantidades relacionadas ao *payoff* do derivativo a ser imunizado e suas derivadas. Desta forma, as subseções seguintes particularizam a análise a alguns casos, a saber: (i) opção *call down-and-in*, nos casos de *strike* maior $(K > H)$ e menor $(K < H)$ que a barreira e (ii) opção *call up-and-out*, no caso de strike menor que a barreira $(K < H)$, pois o caso de strike maior que a barreira, a opção desativar-se-ia para haver exercício, o que significa que a mesma vale zero. Os casos de *calls down-and-out* e *up-and-in* são obtidos por paridade *in-out* aplicada à *call* a partir destes casos a serem analisados[3].

A seguir, a equação (30) é aplicada aos casos de opções *call* com barreiras *down-and-in* e *up-and-out*. Para tanto, a obtenção de f é feita através das composições apresentadas na tabela (2)

2.3.1.1 Opções *call down-and-in,* $K > H$

Nas opções de compra *down-and-in* em que o preço de exercício é superior ao valor da barreira $(K > H)$ tem-se, conforme a tabela (2),

$$c_{di}(K \geq H) = C, \tag{30}$$

onde C é dado por 16. Conforme a subseção (2.3.1), a análise do limite $\tau \to 0$ da fórmula de apreçamento para os termos $N(\eta d_4)$ e $N(\eta(d_4 - \sigma\sqrt{\tau}))$ corresponde à análise do termo

[3] Então, restaria a análise análoga para as *puts*.

$\lim_{\tau \to 0} N(\eta d_4)$, o qual depende do sinal de η e de $\ln\left({}^{H^2}/_{(S_T K)}\right)$: se ${}^{H^2}/_{(S_T K)} > 1$ e $\eta = 1$, o limite, quando $\tau \to 0$, vai a $+\infty$. Matematicamente,

$$\lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{\eta}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{H^2}{S_T K}\right) \middle| \eta = 1, \frac{H^2}{S_T K} > 1 \right\} = +\infty \tag{31}$$

Como, para a acumulada normal, vale a relação

$$\lim_{x \to \infty} N(x) = 1 \tag{32}$$

e, no caso das opções com barreira tipo *down* tem-se que $\eta = 1$, logo

$$\lim_{\tau \to 0} \left\{ N(\eta d_4) | \, \eta = 1, \frac{H^2}{S_T K} > 1 \right\} = 1 \tag{33}$$

A equação (33) pode ser reescrita por meio da função indicadora $I(x) = 1$, se x é verdadeiro

$$\lim_{\tau \to 0} \left\{ N(\eta d_4) | \, \eta = 1, \frac{H^2}{S_T K} > 1 \right\} = I\left(\frac{H^2}{S_T} > K\right), \tag{34}$$

onde assumimos no lado direito que $\eta = 1$.

Analogamente, pode-se verificar a relação:

$$\lim_{\tau \to 0} \left\{ N\left(\eta\left(d_4 - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right) \middle| \, \eta = 1, \frac{H^2}{S_T K} > 1 \right\} = I\left(\frac{H^2}{S_T} > K\right) \tag{35}$$

Têm-se, então, a função *payoff* $\hat{f}(S_T)$

$$\hat{f}(S_T) = \lim_{\tau \to 0} c_{di} \tag{36}$$

E, utilizando os limites (33) e (35), obtém-se

$$f\left(S_T\right)=\phi\left[S_T\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2} I\left(\frac{H^2}{S_T}>K\right)-K\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p} I\left(\frac{H^2}{S_T}>K\right)\right]$$

$$=\phi\left[\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p}\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right) I\left(\frac{H^2}{S_T}>K\right)\right]$$

$$=\phi\left[\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p} máx\left(\frac{H^2}{S_T}-K,0\right)\right], \tag{37}$$

onde p é dado por (22).

Como, por hipótese, $K \geq H$ tem-se que

$$f\left(H\right)=\phi\left[máx\left(H-K,0\right)\right]=0 \tag{38}$$

Reescrevendo a função indicadora da segunda linha da equação (37):

$$f\left(S_T\right)=\phi\left[\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p}\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right) I\left(S_T<\frac{H^2}{K}\right)\right] \tag{39}$$

Derivando a função indicadora da equação (39) em relação à S_T chega-se à

$$\frac{\partial}{\partial S_T}\left[I\left(S_T<\frac{H^2}{K}\right)\right]=-\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right), \tag{40}$$

onde δ é a função delta de Dirac.

Derivando a equação (39) em relação à S_T , e usando (40), chega-se à

$$f'\left(S_T\right)=\phi\left[\frac{p}{H}\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-1}\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right) I\left(S_T<\frac{H^2}{K}\right)-\right.$$

$$\left.\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2} I\left(S_T<\frac{H^2}{K}\right)-\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p}\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right)\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)\right] \tag{41}$$

Ao utilizar a equação (41) para o cálculo de $f'\left(H\right)$, verifica-se que as funções indicadoras anulam-se, pois precisa-se avaliar $I\left(S_T<H^2/K\right)$ quando $S_T=H$, ou seja, avaliar $I\left(H<H^2/K\right)$, que vale 0, pois o caso tratado nesta seção implica que $H/K<1$ e

$H \cdot (H/K) < H$, o que significa que $I\,(H < H) = 0$, dada a afirmação falsa. Além disso, a função $\delta\,(S_T - H^2/K)$ pode ser pensada com um delta de Kronecker, o que significa que $\lim\limits_{S_T \to H} \delta\,(S_T - H^2/K) = 0$, pois $S_T \equiv H$ é diferente de H^2/K. Então,

$$f'\,(S_T = H) = 0 \tag{42}$$

Uma outra forma de avaliar é usar a função δ na forma de função derivada da função indicadora

$$\lim_{S_T \to H} -\delta\left(S_T - \frac{H^2}{K}\right) = \lim_{S_T \to H} \frac{\partial}{\partial S_T}\left[I\left(S_T < \frac{H^2}{K}\right)\right] =$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\left[I\left(S_T + \epsilon < \frac{H^2}{K}\right) - I\left(S_T < \frac{H^2}{K}\right)\right]_{S_T = H} = 0, \tag{43}$$

onde se faz a mesma análise que a do parágrafo anterior para se concluir pela nulidade:

$$\lim_{\epsilon \to 0} I\left(S_T + \epsilon < H^2/K\right)|_{S_T = H} = \lim_{\epsilon \to 0} I\left(H + \epsilon < H^2/K\right) = \lim_{\epsilon \to 0} I\,(H + \epsilon < H) = 0$$

$$I\left(S_T < \frac{H^2}{K}\right)|_{S_T = H} = I\left(H < H^2/K\right) = I\,(H < H) = 0 \tag{44}$$

Para avaliar a derivada $f''\,(S_T)$, é necessário o resultado, que pode ser achado em livros de Física Matemática [19], para a derivada da função delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta'(x)dx = x\delta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \lim_{x \to \infty} x\delta(x) - \lim_{x \to -\infty} x\delta(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx$$

Como a função $\delta(x)$ tem suporte em $x = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} x\delta(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\delta(x) = 0$. Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx$$

ou seja,

$$\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \tag{45}$$

Logo,

$$\frac{f''(S_T)}{\phi} = p(p-1)\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2}\frac{1}{H^2}\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right)I\left(S_T<\frac{H^2}{K}\right) \tag{46a}$$

$$-p\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2} I\left(S_T<\frac{H^2}{K}\right)\cdot\frac{1}{S_T} \tag{46b}$$

$$-2p\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-1}\frac{1}{H}\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right)\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right) \tag{46c}$$

$$-(p-2)\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2}\frac{1}{S_T}I\left(S_T<\frac{H^2}{K}\right) \tag{46d}$$

$$+2\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2}\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right) \tag{46e}$$

$$-\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p}\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right)\frac{\partial}{\partial S_T}\left[\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)\right] \tag{46f}$$

Como $H < K$, foi visto que a função indicadora $I\left(S_T < {}^{H^2}/_{K}\right)$ equivale a $I(S_T < H)$. Logo, tomando $k = H$ em (30), a primeira intergral, correspondente ao *portfolio* de *calls*, não será usada, pois o intervalo de integração é $[H, \infty[$ e a indicadora $I\left(S_T < {}^{H^2}/_{K}\right)$, com a transformação $S_T \to \nu$, corresponde a $I(\nu < H)$, fora de tal intervalo, portanto. Além disso, o suporte das funções delta $\delta\left(S_T - {}^{H^2}/_{K}\right)$ também está no intervalo $[0, H]$ e, desta forma, conclui-se que todos os termos da equação (46a) atuam em $[0, H]$, ou seja, abrangem o *portfolio* de *puts* na equação (30).

O termo (46c) da equação (46a) produz, na integral do *portfolio* de *puts* de (30), uma contribuição nula. De fato,

$$-\int_0^H 2p\left(\frac{\nu}{H}\right)^{p-1}\frac{1}{H}\left(\frac{H^2}{\nu}-K\right)\delta\left(\nu-\frac{H^2}{K}\right)P(\nu)d\nu =$$

$$-2p\left(\frac{H}{K}\right)^{p-1}\frac{1}{H}(K-K)\,P\left(\frac{H^2}{K}\right) = 0, \tag{47}$$

pela zeragem no parênteses central.

Quanto à derivada da expressão (46f), tem-se, ao se aplicar a regra da cadeia e, depois, a equação (45),

$$\frac{\partial}{\partial S_T}\left[\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)}\left[\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)\right]=$$

$$-\frac{\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)}{\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)} \tag{48}$$

Logo, na expressão (46f), colocando-se K/S_T em evidência,

$$-\left(\frac{S_T}{H}\right)^p\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right)\frac{\partial}{\partial S_T}\left[\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)\right]=$$

$$\left(\frac{S_T}{K}\right)^p\frac{K}{S_T}\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)\left[-\frac{\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)}{\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)}\right]=$$

$$-\left(\frac{S_T}{K}\right)^{p-2}\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right) \tag{49}$$

Assim, a equação (46a) pode ser reescrita como mostra a equação:

$$\hat{f}''\left(S_T\right)=\phi\left\{\left(\frac{S_T}{K}\right)^{p-2}\delta\left(S_T-\frac{H^2}{K}\right)+\right.$$

$$\left.(p-1)\left(\frac{S_T}{K}\right)^{p-2}\left[\frac{p-2}{S_T}-\frac{pK}{H^2}\right]I\left(S_T<\frac{H^2}{K}\right)\right\} \tag{50}$$

Substituindo (38), (48) e (50) em (28) obtém-se

$$V_0=\phi\left\{\int_0^H\left(\frac{v}{H}\right)^{p-2}\delta\left(v-\frac{H^2}{K}\right)P\left(v\right)dv+\right.$$

$$\left.\int_0^H(p-1)\left(\frac{v}{K}\right)^{p-2}\left[\frac{p-2}{v}-\frac{pK}{H^2}\right]I\left(v<\frac{H^2}{K}\right)P\left(v\right)dv\right\} \tag{51}$$

Integrando a equação (51), tem-se que

$$V_0 = \phi \left\{ \left(\frac{H}{K}\right)^{p-2} P\left(\frac{H^2}{K}\right) + \right.$$

$$\left. \int_0^H (p-1)\left(\frac{v}{K}\right)^{p-2} \left[\frac{p-2}{v} - \frac{pK}{H^2}\right] I\left(v < \frac{H^2}{K}\right) P(v)\, dv \right\} \tag{52}$$

Assim, o *portfolio* de *hedge* fica definido como:

(i) $\phi \left(\frac{H}{K}\right)^{p-2}$ opções *put* com preço de exercício (*strike*) de H^2/K e,

(ii) $\phi\,(p-1)\left(\frac{v}{K}\right)^{p-2}\left[\frac{p-2}{v} - \frac{pK}{H^2}\right]\Delta v$ opções *put* com preço de exercício igual a v, sendo $v < H^2/K$.

porque, na prática, o *portfolio* contínuo de opções *put* de (ii) não é factível de se montar e acaba-se trocando a integral por um somatório de n *strikes* ν_i,

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \phi\,(p-1)\left(\frac{v_i}{K}\right)^{p-2} \left[\frac{p-2}{v_i} - \frac{pK}{H^2}\right] \Delta v \right\}, \tag{53}$$

em que,

$$\Delta\nu = \nu_{i+1} - \nu_i = \frac{H-0}{n} \tag{54}$$

2.3.1.2 Opções *call down-and-in,* $K < H$

Nas opções de compra *down-and-in* em que o preço de exercício é inferior ao valor da barreira tem-se, pela tabela (2), que

$$c_{di}\,(K < H) = A - B + D, \tag{55}$$

sendo A, B e D são dados pelas equações (13), (14) e (18), respectivamente. Tal como o procedimento anterior, a função $f\left(S_T\right)$ a ser usada como *payoff* para a equação (25) é obtida através do limite de $\tau \to 0$ da função preço (55)

$$f\left(S_T\right) = \lim_{\tau \to 0} c_{di} \tag{56}$$

Agora é necessário analisar $\lim_{\tau \to 0} N\left(\phi d_1\right)$, $\lim_{\tau \to 0} N\left(\phi d_3\right)$, e $\lim_{\tau \to 0} N\left(\eta d_5\right)$, dado que, novamente, os demais termos têm somente componentes $\sigma\sqrt{\tau}$ extras e, assim, resultam nos mesmos limites que os três primeiros. Usando o fato que $\phi = 1$ para *calls* e $\eta = 1$ para barreiras *down* e, como, para calls, há exercício se $S_T > K$, para os limites das funções acumuladas normal resultarem em um, é necessário examinar os casos em que seus argumentos tendem a infinito. Isto ocorre quando nas condições a seguir

$$\lim_{\tau \to 0} \phi d_1 = \lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{\phi}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S_T}{K}\right) \middle| \phi = 1, \frac{S_T}{K} > 1 \right\} = +\infty \tag{57a}$$

$$\lim_{\tau \to 0} \phi d_3 = \lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{\phi}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S_T}{H}\right) \middle| \phi = 1, \frac{S_T}{H} > 1 \right\} = +\infty \tag{57b}$$

$$\lim_{\tau \to 0} \eta d_5 = \lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{\eta}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{H}{S_T}\right) \middle| \eta = 1, \frac{H}{S_T} > 1 \right\} = +\infty \tag{57c}$$

Assim,

$$\lim_{\tau \to 0} N\left(\phi d_1\right) = I(S_T > K) \tag{58a}$$

$$\lim_{\tau \to 0} N\left(\phi d_3\right) = I(S_T > H) \tag{58b}$$

$$\lim_{\tau \to 0} N\left(\eta d_5\right) = I(S_T < H) \tag{58c}$$

Com estes limites em (56), e levando-se em conta (13), (14) e (18), conclui-se que $f\left(S_T\right)$ é dado por:

$$f\left(S_T\right)=\phi\left\{\left(S_T-K\right)I\left(S_T>K\right)-\left(S_T-K\right)I\left(S_T>H\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{S_T}{H}\right)^p\left(\frac{H^2}{S_T}-K\right)I\left(S_T<H\right)\right\} \tag{59}$$

A derivada da função $I\left(S_T>H\right)$ em relação a S_T é dada por

$$\frac{\partial}{\partial S_T}I\left(S_T>H\right)=\delta\left(S_T-H\right) \tag{60}$$

E, a derivada da função $I\left(S_T<H\right)$ em relação a S_T é dada por

$$\frac{\partial}{\partial S_T}I\left(S_T<H\right)=-\delta\left(S_T-H\right) \tag{61}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial}{\partial S_T}I\left(S_T>K\right)=\delta\left(S_T-K\right) \tag{62}$$

Assim, pode-se obter a derivada da equação (59) por meio de

$$f'\left(S_T\right)=\phi\left\{I\left(S_T>K\right)+\left(S_T-K\right)\delta\left(S_T-K\right)-I\left(S_T>H\right)\right.$$

$$-\left(S_T-K\right)\delta\left(S_T-H\right)+\frac{p}{H}\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-1}\left[\frac{H^2}{S_T}-K\right]I\left(S_T<H\right)$$

$$\left.-\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2}I\left(S_T<H\right)-\left(\frac{S_T}{H}\right)^p\left[\frac{H^2}{S_T}-K\right]\delta\left(S_T-H\right)\right\} \tag{63}$$

Para a segunda derivada de $f\left(S_T\right)$, pode-se utilizar o conceito de limite para as derivadas das funções δ, onde houver problema de divisão por zero por ocasião da integração na equação (30), caso a relação (45) fosse aplicada. O uso de limites resultarão em *put spreads* quando substituídas na equação (30), na integral que compreende as *puts*. Assim, a (45) para o cálculo da derivada de $\delta\left(S_T-K\right)$ na primeira linha de (63), e limites nas derivadas das demais funções $\delta(S_T-H)$ da mesma equação resulta em

$$\frac{f''(S_T)}{\phi} = \delta(S_T - K) - (S_T - K)\frac{\delta(S_T - K)}{(S_T - K)} + \delta(S_T - K) - \delta(S_T - H) \tag{64a}$$

$$-\delta(S_T - H) + (S_T - K)\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{\delta(S_T - (H + \varepsilon)) - \delta(S_T - H)}{\varepsilon} \tag{64b}$$

$$+p(p-1)\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2}\frac{1}{H^2}\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right)I(S_T < H) - p\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-3}\frac{1}{H}I(H > S_T) \tag{64c}$$

$$-2p\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-1}\frac{1}{H}\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right)\delta(S_T - H) \tag{64d}$$

$$-(p-2)\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-3}\frac{1}{H}I(H > S_T) \tag{64e}$$

$$+2\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2}\delta(S_T - H) \tag{64f}$$

$$+\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p}\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right)\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{\delta(S_T - (H + \varepsilon)) - \delta(S_T - H)}{\varepsilon} \tag{64g}$$

Escolhendo para k um valor $\theta > H$, tem-se que $\theta > K$, em consequência da hipótese analisada e, portanto, em (59), considerando as funções indicadoras envolvidas,

$$f(\theta) = \phi\left[(\theta - K) - (\theta - K) + \left(\frac{\theta}{H}\right)^{p}\left(\frac{H^2}{\theta} - K\right)I(\theta < H)\right] = 0 \tag{65}$$

Já para a derivada (63), deve-se avaliar $\delta(\theta - K)$ e $\delta(\theta - H)$ como deltas de Kronecker ao se trabalhar com $f'(\theta)$, além das funções indicadoras analisadas em (65). Como $\theta > H$ e $\theta > K$, em (28), $\delta(\theta - K) = 0$ e $\delta(\theta - H) = 0$ para $f'(\theta)$. Logo,

$$f'(\theta) = 0 \tag{66}$$

Assim, a equação (28) passa a ser dada por

$$V_0 = \int_0^{\theta} f''(v) Put(v) dv \tag{67}$$

Sendo $H < \theta$, substituindo (64a) em (67) e trabalhando a atuação das funções δ na integral, chega-se a

$$V_0 = Put(K) - 2Put(H) + Put(H+\varepsilon) + (H-K) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{Put\,(H+\varepsilon) - Put\,(H)}{\varepsilon} \tag{68a}$$

$$-2p\frac{(H-K)}{H} Put(H) + Put\,(H) + g(\varepsilon)\frac{Put(H+\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{(H-K)}{\varepsilon} Put(H) \tag{68b}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[p(p-1) \left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-2} \frac{1}{H^2} \left(\frac{H^2}{v_i} - K\right) - 2\frac{(p-1)}{H} \left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-3} \right] \right. \tag{68c}$$

$$\left. Put(v_i) I(v_i < H) \Delta v \right\}, \tag{68d}$$

onde $\Delta v = (\theta - 0)/n$, e n representa a discretização do modelo.

A função $g\,(\varepsilon)$ é definida por:

$$g(\varepsilon) = \left(\frac{H+\varepsilon}{H}\right)^{p} \left(\frac{H^2}{H+\varepsilon} - K\right) \tag{69}$$

E suas duas primeiras derivadas são dadas respectivamente por:

$$g'(\varepsilon) = \frac{p}{H} \left(\frac{H+\varepsilon}{H}\right)^{p-1} \left(\frac{H^2}{H+\varepsilon} - K\right) - \left(\frac{H+\varepsilon}{H}\right)^{p-2} \tag{70}$$

$$g''(\varepsilon) = \frac{p(p-1)}{H^2} \left(\frac{H+\varepsilon}{H}\right)^{p-2} \left(\frac{H^2}{H+\varepsilon} - K\right) -$$

$$\frac{p}{H} \left(\frac{H+\varepsilon}{H}\right)^{p-3} - \frac{p-2}{H} \left(\frac{H+\varepsilon}{H}\right)^{p-3} \tag{71}$$

Expandindo a equação (69) em série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ e desprezando os termos de ordem superiores, chega-se à:

$$g(\varepsilon) \cong (H-K) + \left[\frac{p}{H}(H-K) - 1\right]\varepsilon + \left[\frac{p(p-1)}{H^2}(H-K) - \frac{2(p-1)}{H}\right]\varepsilon^2 \tag{72}$$

Substituindo (72) em (68d) obtém-se:

$$V_0 = Put(K) - Put(H) + Put(H+\varepsilon) + (H-K)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{Put\,(H+\varepsilon) - Put\,(H)}{\varepsilon} \tag{73a}$$

$$-2p\frac{(H-K)}{H}Put(H) + (H-K)\frac{Put(H+\varepsilon)}{\varepsilon} + p\frac{(H-K)}{H}Put(H+\varepsilon) \tag{73b}$$

$$+\left[\frac{p(p-1)}{H^2}(H-K)\right]\varepsilon Put(H+\varepsilon) - \frac{2(p-1)}{H}\varepsilon Put(H+\varepsilon) - \frac{H-K}{\varepsilon}Put(H) \tag{73c}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[p(p-1)\left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-2}\frac{1}{H^2}\left(\frac{H^2}{v_i} - K\right) - 2\frac{(p-1)}{H}\left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-3}\right]\right. \tag{73d}$$

$$\left. Put(v_i)I(v_i < H)\Delta v\right\} \tag{73e}$$

Como $\varepsilon \to 0$, a equação acima pode ser reescrita como

$$V_0 = Put(K) + 2(H-K)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{Put\,(H+\varepsilon) - Put\,(H)}{\varepsilon} - p\frac{(H-K)}{H}Put(H) \tag{74a}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[p(p-1)\left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-2}\frac{1}{H^2}\left(\frac{H^2}{v_i} - K\right) - 2\frac{(p-1)}{H}\left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-3}\right]\right. \tag{74b}$$

$$Put(v_i)I(v_i < H)\Delta v\} \tag{74c}$$

Financeiramente, isto corresponde a um *portfolio* de

- Compra de uma *put* de *strike* K;
- Compra de $2(H-K)$ *put spreads* de *strike* H;
- Venda de $p\frac{(H-K)}{H}$ *puts* de *strike* H e
- Um portfolio de $\left[p(p-1)\left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-2}\frac{1}{H^2}\left(\frac{H^2}{v_i}-K\right)-2\frac{(p-1)}{H}\left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-3}\right]\Delta v$ *puts* de *strikes* v_i, todos abaixo da barreira H.

Na próxima subseção será analisado o caso restante que possibilita a análise de *hedge* de qualquer barreira simples para as *calls*.

2.3.1.3 Opções *call up-and-out,* $K < H$

Quando o *strike* é igual ou superior ao valor da barreira, as opções *up-and-out* possuem *payoff* igual a zero, pois a opção call, para haver exercício, requer $S_T > K$ e, neste caso, isso implica na desativação. Nos casos contrários, o *payoff* é dado por

$$c_{uo}\left(K < H\right) = A - B + C - D \tag{75}$$

Onde A,B,C e D são dadas pelas equações (13)-(18). Tal como feito anteriormente, analisando o limite para o caso em que a maturidade tende a zero ($\tau \to 0$), tem-se

$$\lim_{\tau\to 0} c_{uo} = \lim_{\tau\to 0}(A - B + C - D) = f\left(S_T\right) \tag{76}$$

Levando-se em conta a condição para o exercício de uma call, $S_T > K$, o caso em questão para a barreira, $K < H$, e o fato de que, para as barreiras *up*, $\eta = -1$, e para *calls* $\phi = 1$, pode-se escrever

$$\lim_{\tau\to 0} A = (S_T - K) \lim_{\tau\to 0} \left\{ N\left(\phi \frac{ln\left(S_T/K\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) |\phi = 1, S_T > K \right\} = (S_T - K)\, I\left(S_T > K\right) \quad (77)$$

$$\lim_{\tau\to 0} B = (S_T - K) \lim_{\tau\to 0} \left\{ N\left(\phi \frac{ln\left(S_T/H\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) |\phi = 1, K < H \right\} = (S_T - K)\, I\left(K > H\right) \quad (78)$$

$$\lim_{\tau\to 0} C = \left(S_T \left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2} - K \left(\frac{S_T}{H}\right)^{p} \right) \lim_{\tau\to 0} \left\{ N\left(\eta \frac{ln\left(H^2/(S_T K)\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) |\eta = -1; H^2 < S_T K \right\} =$$

$$\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right) \left(\frac{S_T}{H}\right)^{p} I\left(S_T > \frac{H^2}{K}\right) \quad (79)$$

$$\lim_{\tau\to 0} D = \left(S_T \left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2} - K \left(\frac{S_T}{H}\right)^{p} \right) \lim_{\tau\to 0} \left\{ N\left(\eta \frac{ln\left(H/S_T\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) |\eta = -1; H < S_T \right\} =$$

$$\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right) \left(\frac{S_T}{H}\right)^{p} I\left(S_T > H\right) \quad (80)$$

As condições $H^2 < S_T K$ e $H < S_T$ em (87d) e (87e) são escritas no efeito conjunto que geram com η: como este é negativo, o argumento que estiver na função ln tem que gerar um número negativo, para a acumulada normal ir para um quando $\tau \to \infty$. Substituíndo as equações (77)-(80) em (76), obtém-se

$$f\left(S_T\right) = (S_T - K)\left[I\left(S_T > K\right) - I\left(S_T > H\right)\right] +$$

$$\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right) \left(\frac{S_T}{H}\right)^{p} \left[I\left(S_T > \frac{H^2}{K}\right) - I\left(S_T > H\right) \right] \quad (81)$$

Levando-se em conta as relações (60), (61) e a análoga a (40)

$$\frac{\partial}{\partial S_T}\left[I\left(S_T > \frac{H^2}{K}\right)\right] = \delta\left(S_T - \frac{H^2}{K}\right) \tag{82}$$

Deste modo, a derivada da equação (81) em relação a S_T é dada por:

$$f'(S_T) = [I(S_T > K) - I(S_T > H)] + (S_T - K)[\delta(S_T - K) - \delta(S_T - H)] +$$

$$\left[-\frac{H^2}{S_T^2}\left(\frac{S_T}{H}\right)^p + \frac{p}{H}\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-1}\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right)\left[I\left(S_T > \frac{H^2}{K}\right) - I(S_T > H)\right]\right] +$$

$$\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right)\left(\frac{S_T}{H}\right)^p\left[\delta\left(S_T > \frac{H^2}{K}\right) - \delta(S_T > H)\right] \tag{83}$$

Quanto à segunda derivada da equação (81) em relação a S_T,usa-se a relação (45), de onde se obtém

$$f''(S_T) = 2[\delta(S_T - K) - \delta(S_T - H)] + (S_T - K)\left[-\frac{\delta(S_T - K)}{(S_T - K)} - \frac{\partial}{\partial S_T}\delta(S_T - H)\right]$$

$$+\left\{(p-2)\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-3}\frac{1}{H}\left[(p-1) - pS_T\frac{K}{H^2}\right] - \left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2}p\frac{K}{H^2}\right\}$$

$$\left[I\left(S_T > \frac{H^2}{K}\right) - I(S_T > H)\right] +$$

$$\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2}\left[(p-1) - pS_T\frac{K}{H^2}\right]\left[\delta\left(S_T - \frac{H^2}{K}\right) - \delta(S_T - H)\right] +$$

$$\left[-\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-2} + \frac{p}{H}\left(\frac{S_T}{H}\right)^{p-1}\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right)\right]\left[\delta\left(S_T - \frac{H^2}{K}\right) - \delta(S_T - H)\right] +$$

$$\frac{K}{S_T}\left(\frac{S_T}{H}\right)^p\left(\frac{H^2}{S_T} - K\right)\left[-\frac{\delta(S_T - K)}{(S_T - K)} - \frac{\partial}{\partial S_T}\delta(S_T - H)\right] \tag{84}$$

Na equação (84), é conveniente também expressar em termos de limite a derivada com relação à S_T da função $\delta\left(S_T - H\right)$ na primeira e última linha, conforme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} - \frac{1}{\varepsilon}\left[\delta\left(S_T - (H+\varepsilon)\right) - \delta\left(S_T - H\right)\right] \tag{85}$$

Substituindo (81)-(84) em (28), e tomando-se k, nesta última, como um número qualquer tal que $\theta < K$, de forma que o suporte das funções δ que comparecem em (84) ficam no intervalo da integral relativa ao portfolio de *calls*,

$$V_0 = C\left(K\right) - 2C\left(H\right) + \int_{\Theta}^{\infty}\left(v - K\right)\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\delta\left(v - (H+\varepsilon)\right) - \delta\left(v - H\right)\right)\frac{1}{\varepsilon}C\left(v\right)dv -$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[(p-2)\left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-3}\frac{1}{H}\left((p-1) - pv_i\frac{K}{H^2}\right) - \left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-2}p\frac{K}{H^2}\right]\right.$$

$$\left. I\left(v_i \in \left[H, \frac{H^2}{K}\right]\right).C\left(v_i\right)\Delta v\right\}$$

$$-\left(\frac{H}{K}\right)^{p-2}C\left(\frac{H^2}{K}\right) - \left[(H-K)\frac{p}{H} - 1\right]C\left(H\right) - \left[(p-1) - p\frac{K}{H}\right]C\left(H\right) +$$

$$\int_{\Theta}^{\infty}\left[v\left(\frac{v}{H}\right)^{p-2} - K\left(\frac{v}{H}\right)^{p}\right]\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\delta\left(v - (H+\varepsilon)\right) - \delta\left(v - H\right)\right)\frac{1}{\varepsilon}C\left(v\right)dv \tag{86}$$

Resolvendo os limites da equação (86), obtém-se:

$$V_0 = C\left(K\right) - 2C\left(H\right) + \left(H - K + \varepsilon\right)\frac{C\left(H+\varepsilon\right)}{\varepsilon} - \left(H - K\right)\frac{C\left(H\right)}{\varepsilon} - \tag{87a}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left[(p-2)\left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-3}\frac{1}{H}\left((p-1) - pv_i\frac{K}{H^2}\right) - \left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-2}p\frac{K}{H^2}\right]\right. \tag{87b}$$

$$I\left(v_i \in \left[H, \frac{H^2}{K}\right]\right).C\left(v_i\right)\Delta v\Bigg\} \tag{87c}$$

$$-2\left[\left(H-K\right)\frac{p}{H}-1\right]C\left(H\right)-\left(\frac{H}{K}\right)^{p-2}C\left(\frac{H^2}{K}\right)+ \tag{87d}$$

$$\left[H\left(H-K\right)-K\varepsilon\right]\left(\frac{H+\varepsilon}{H}\right)^{p-1}\frac{1}{H}\frac{C\left(H+\varepsilon\right)}{\varepsilon}-\left(H-K\right)\frac{C\left(H\right)}{\varepsilon} \tag{87e}$$

Na última linha da equação (87e), o termo

$$\left(\frac{H+\varepsilon}{H}\right)^{p-1}\frac{1}{H} \tag{88}$$

é $g(\varepsilon)/H$ com $K=0$, onde $g(\varepsilon)$ é dada por (69). Então, usando a expansão em série de Taylor (72), chega-se a

$$-\frac{1}{\varepsilon}C\left(H+\varepsilon\right)\left[K\varepsilon-H\left(H-K\right)\right]\left[\frac{1}{H}+\frac{\left(p-1\right)}{H^2}\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{\left(p-1\right)\left(p-2\right)}{H^3}\varepsilon^2+\ldots\right]- \tag{89a}$$

$$\frac{\left(H-K\right)}{\varepsilon}C\left(H\right)=-\frac{1}{\varepsilon}\left[C\left(H\right)-C\left(H+\varepsilon\right)\right]\left(H-K\right)-\frac{K}{H}C\left(H\right)- \tag{89b}$$

$$\left[K\varepsilon-H\left(H-K\right)\right]C\left(H\right)\left[\frac{\left(p-1\right)}{H^2}\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{\left(p-1\right)\left(p-2\right)}{H^3}\varepsilon^2+\ldots\right]= \tag{89c}$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C\left(H\right)-C\left(H+\varepsilon\right)}{\varepsilon}\left(H-K\right)-\left(p-1\right)\left(\frac{K}{H}-1\right)C\left(H\right)-\frac{K}{H}C\left(H\right) \tag{89d}$$

Considerando a equação (28), pela escolha $\theta < K$, conclui-se que $f(\theta)=0$ e $f'(\theta)=0$ em (81) e (83), respectivamente, pela análise de funções indicadoras e tratando as funções δ que aparecem em (83) como deltas de Kronecker. Substituíndo as equações (89a)-(89d) nas equações (87a)-(87e) chega-se à carteira replicante da opção *call up-and-out*

$$V_0 = C(K) + p\left(\frac{K}{H} - 1\right) C(H) - \frac{2(H-K)}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C(H) - C(H+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$- \left(\frac{H}{K}\right)^{p-2} C\left(\frac{H^2}{K}\right) - \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[(p-1) \left(\frac{v_i}{H}\right)^{p-2} \frac{1}{H} \left[(p-2) \left(\frac{H}{v_i}\right) - p\frac{K}{H} \right] \right] \right.$$

$$\left. \cdot I\left(v_i \in \left[H, \frac{H^2}{K}\right]\right) \cdot C(v_i)\, \Delta v \right\}, \tag{90}$$

sendo que a interpretação de seus termos é análoga aos itens anteriores.

Na próxima subseção, é descrito o *hedge* estático por regressão linear, segundo [1].

2.3.2 Hedge Estático com Regressão

A teoria de replicação trabalha com a ideia de que se dois *portfolios* têm o mesmo valor nas condições de contorno, eles têm o mesmo valor em todos os pontos no interior dessas condições [1]. No caso de uma opção *knock- out*, a proteção significa também replicar o efeito de desativação sobre o investimento. Como a desativação pode ocorrer em qualquer instante entre a emissão da opção e o vencimento, as condições de contorno relativas à desativação podem ser tratadas por um conjunto de opções *vanillas* de vencimentos distribuídos ao longo do tempo, cujos *strike*s devem ser não necessariamente iguais, mas próximos, ao valor da barreira da opção, pois entende-se que é realísticamente impossível o operador ter disponível exatamente o mesmo valor de *strike* em vários vencimentos, com liquidez. A replicação do efeito do *payoff* quanto ao tipo *call* ou *put* contido na opção de barreira é feita com o auxílio de uma opção vanilla de mesmo tipo de *payoff* (*call* ou *put*), valor de *strike* e vencimento que aqueles do contrato de barreira. Esta é a ideia contida em [1].

A vantagem deste método frente à abordagem tradicional de *hedge* estático descrita em [2], é que, como visto, esta última depende (i) do modelo adotado e (ii) de se trabalhar as equações para achar as quantidades da carteira replicante. Já no de [1], o método (i) independe do modelo adotado e (ii) as quantidades são sistematica e mais facilmente obtidas pela resolução de um sistema de equações montado de forma a impor a replicação de valores ao longo do tempo. A forma como isso é feito é detalhada a seguir para casos que permitam comparação com os vistos nas seções anteriores, mesmo que por uso da paridade *in-out* (24), quais sejam, opções

call up-and-out, e *call down-and-out*. Ambos os casos são abordados em [1].

2.3.2.1 Opções *call up-and-out*

No caso de uma opção *knock- out*, a proteção significa replicar o efeito de desativação sobre o investimento. Para uma *call*, com barreira H e *strike* K, no vencimento $(\tau = 0)$, seu valor deve ser zero, se o máximo observado para o preço do ativo-base, $max\{S_t\}$, no período de monitoramento for superior ou igual à barreira H. Caso contrário, a opção liquida como uma *call vanilla*.

$$C_{UO}(S_T, K, \tau = 0) = max(S_T - K, 0),\ max\{S_t\} < H \tag{91a}$$

$$C_{UO}(S_T, K, \tau = 0) = 0,\ \ max\{S_t\} \geq H \tag{91b}$$

Portanto, o *portfolio* de proteção para uma opção *call knock-out*, é composto de duas parcelas: (I) uma opção que replica o *payoff* quando é removida a condição de barreira, porque esta passa a ser a parcela a ser protegida se a opção existir no vencimento; e (II) opções *call* de vários vencimentos T_i, que visam proteger a opção original contra a ocorrência de um evento de barreira ao longo do tempo da opção. As opções devem ser do tipo *call*, pois as mesmas ganham valor quando o ativo vai em direção à barreira de alta (*up*), cancelando a opção (I) e zerando o valor total, como é requerido sob desativação. Matematicamente, esse *portfolio*, para as opções com barreira *up-and-out*, pode ser escrito como

$$\pi(S, t) = (I) + (II) \tag{92}$$

$$(I) = C\left(S, K, T - t\right) \tag{93}$$

$$(II) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \Theta\left(T_i - t\right) C\left(S, K_i, T_i - t\right) \tag{94}$$

Nas equações acima, $C\left(S, K, T - t\right)$ representa uma opção *call* de *spot*, *strike* e vencimento iguais a S, K e $T - t$, respectivamente. a_i são as quantidades das opções necessárias para proteger a opção original e Θ é a função *Heaviside*, dada por

$$\Theta\left(x\right)=\begin{cases}1,\forall x\geq 0\\ 0,\forall x<0\end{cases} \tag{95}$$

Então, espera-se que em uma *call up-and-out* (com $K < H$, para fazer sentido, pois precisaria que o *spot* terminasse acima da barreira para haver exercício da *call vanilla*, mas isso implicaria em desativação), se houver cruzamento $(S > H)$, a opção na parte (I) seja cancelada pela pelas opções (II) relacionadas ao evento de barreira. Desta forma, a parte (II) é composta de N opções de *strikes* próximos, mas não necessariamente iguais, à barreira, com vencimentos $T_i < T$, $i = 0, ..., N-1$; e a parte (I) é uma *call vanilla* de *strike* (K) e vencimento T iguais aos da opção a ser protegida. Quando houver a desarivação, π deve anular-se, isto é, $\pi(H,t) = 0$.

$$-C\left(H,K,T-t\right)=\sum_{i=0}^{N-1}a_i\Theta\left(T_i-t\right)C\left(H,K_i,T_i-t\right),\ K_i\approx H \tag{96}$$

De fato, esta condição deve ser observada em qualquer $t_\alpha \leq T$, $\alpha = 0, ..., M-1$; em que o mesmo for avaliado, conforme a representação da figura (1). Então, há M condições temporais análogas à equação (96), que compõem um sistema

$$\sum_{i=0}^{N-1}A_{\alpha i}a_i=b_\alpha \tag{97a}$$

$$A_{\alpha i}=\Theta\left(T_i-t_\alpha\right)C\left(H,K_i,T_i-t_\alpha\right) \tag{97b}$$

$$b_\alpha=-C\left(H,K,T-t_\alpha\right) \tag{97c}$$

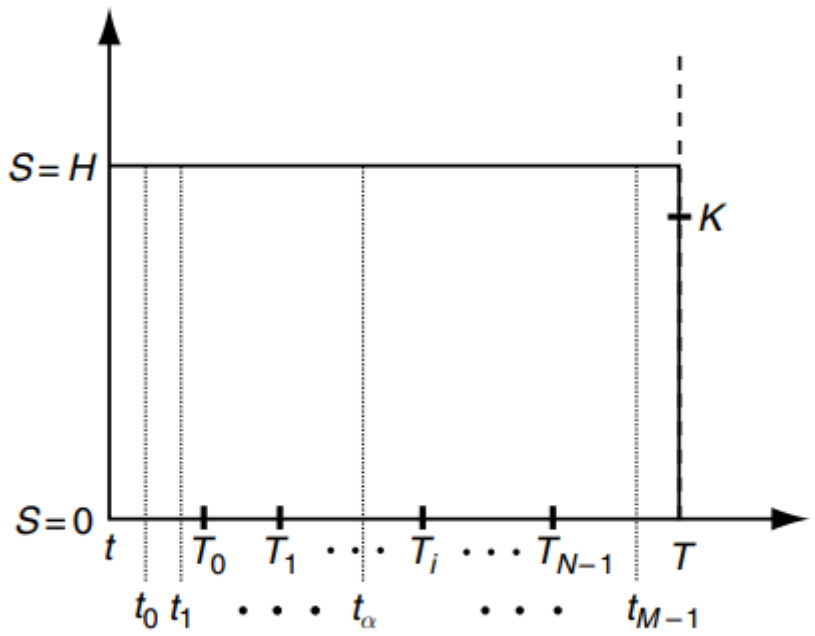

Figura 1: Estratégia de replicação para as opções em [1]: T_i representam os vencimentos das opções de *strikes* próximos à barreira H. T é o vencimento da opção de barreira.

Explicitamente, em forma matricial,

$$Aa = b, \tag{98}$$

em que a matriz A representa valores das N opções de *strikes* (K_i) próximos à barreira e vencimentos T_i

$$A = \begin{bmatrix} \Theta\left(T_0 - t_0\right) C\left(H, K_0, T_0 - t_0\right) & \cdots & \Theta\left(T_{N-1} - t_0\right) C\left(H, K_{N-1}, T_{N-1} - t_0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta\left(T_0 - t_{M-1}\right) C\left(H, K_0, T_0 - t_{M-1}\right) & \cdots & \Theta\left(T_{N-1} - t_0\right) C\left(H, K_{N-1}, T_{N-1} - t_{M-1}\right) \end{bmatrix} \tag{99}$$

Já o vetor b representa os valores das opções de compra *plain vanilla,* com as características da opção com barreira, ou seja, com valor da ação igual ao valor da barreira e preço de exercício e prazo iguais aos valores da opção com barreira.

$$b = -\begin{bmatrix} C\left(H, K, T - t_0\right) \\ \vdots \\ C\left(H, K, T - t_{M-1}\right) \end{bmatrix} \tag{100}$$

Finalmente, a é o vetor de pesos $[a_0, ..., a_{N-1}]^T$ a serem obtidos pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

$$a = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{101}$$

2.3.2.2 Opções *call down-and-out*

No caso de uma opção *call down-and-out*, as condições (91a) e (91b) modificam-se para

$$C_{DO}(S_T, K, \tau = 0) = max(S_T - K, 0),\ min\{S_t\} > H \tag{102a}$$

$$C_{DO}(S_T, K, \tau = 0) = 0,\ \ min\{S_t\} \leq H \tag{102b}$$

Para realizar o *hedge* das opções com barreira do tipo *down-and-out*, a forma conveniente de se proteger ao longo do tempo é utilizar opções *put*, ao invés das *calls* do portfolio temporal (94), pois as mesmas ganham valor se o ativo cai, cancelando a opção que replica o *payoff* de *strike* K em (93). Neste caso, A é composta por *puts*

$$A = \begin{bmatrix} \Theta\left(T_0 - t_0\right) P\left(H, K_0, T_0 - t_0\right) & \cdots & \Theta\left(T_{N-1} - t_0\right) P\left(H, K_{N-1}, T_{N-1} - t_0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta\left(T_0 - t_{M-1}\right) P\left(H, K_0, T_0 - t_{M-1}\right) & \cdots & \Theta\left(T_{N-1} - t_0\right) P\left(H, K_{N-1}, T_{N-1} - t_{M-1}\right) \end{bmatrix}, \tag{103}$$

onde o vetor b é o mesmo que (100) e, novamente, o vetor de pesos a é obtido por (101).

3 APLICAÇÕES

Neste capítulo são realizados ensaios numéricos para efetuar o *hedge* de opções com barreira utilizando as metodologias do tipo de hedge estático propostas por Albanese e Campolieti [1], onde se utiliza uma combinação linear de opções *plain vanilla,* com pesos a serem determinados por Mímimos Quadrados (MMQ, ou LS, em inglês), conforme a seção (2.3.2); e a tradicional, relacionada ao teorema de Fubini (25), descrita em Carr e Chou [2, 3], detalhada na seção (2.3.1).

A ideia geral é, inicialmente, estabelecer quantidades de *hedge* segundo os dois procedimentos, em linha com a ideia de *hedge* estático, e, em um segundo momento, variar fatores de risco envolvidos no apreçamento das opções, a saber: *spot*, tempo, volatilidade e juros; observando se o *hedge* proposto no primeiro passo continua a proteger o instrumento de barreira sob tais variações, isto é, se os preços das carteiras de *hedge* acompanham o preço do instrumento exótico. Por isso, em cada exemplo estudado, são apresentados gráficos comparativos de preços (i) do modelo de apreçamento da opção, (ii) do modelo de *hedge* estático por regressão de Mínimos Quadrados (*Least Squares, LS*), que será chamado de *Static Hedge LS*, e (iii) do modelo de *hedge* estático tradicional, que denotado por *Static Hedge.*

Como primeiro exemplo, é analisado o *hedge* de uma opção de compra com preço de exercício (*strike*) de R$ 50,00, valor de barreira de R$ 40,00, taxa livre de risco de 9,25%, volatilidade de 30% e prazo de 3 anos.

A variação do valor do *hedge* em função do valor do *spot* considerando uma *call-down-and-in (CDI)*, *call down-and-out (CDO)* e uma *call up-and-in (CUI)* estão apresentadas nas figuras (2), (3) e (4), respectivamente. Os pontos em cruz e em círculo representam as estratégias de *hedge* estático (*Static Hedge*), segundo Carr e Chou [2, 3], e *hedge* estático com regressão (*Static Hedge LS*), conforme Albanese e Campolieti [1], respectivamente. Já a linha contínua representa os valores das opções com barreira fornecidas pelo modelo analítico de [16], apresentado na seção (2.2).

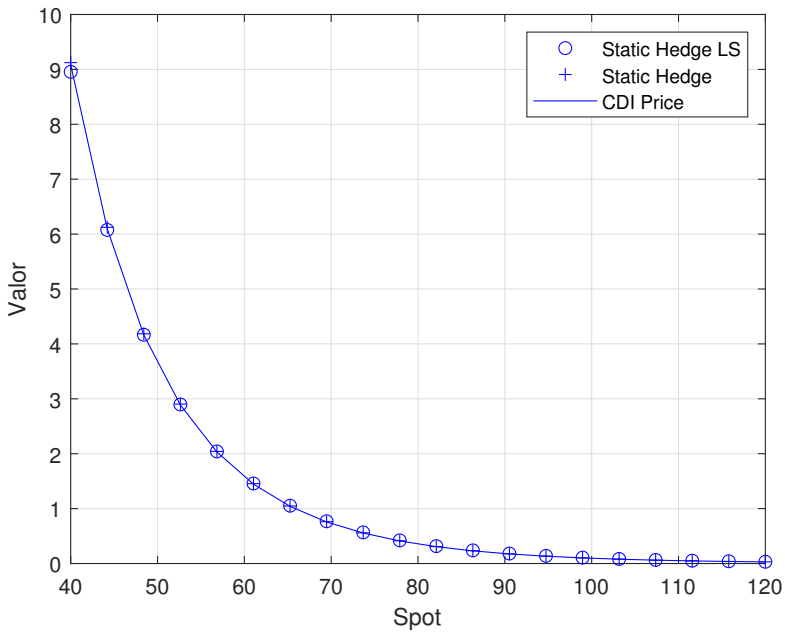

Figura 2: *Call-Down-and-In.*

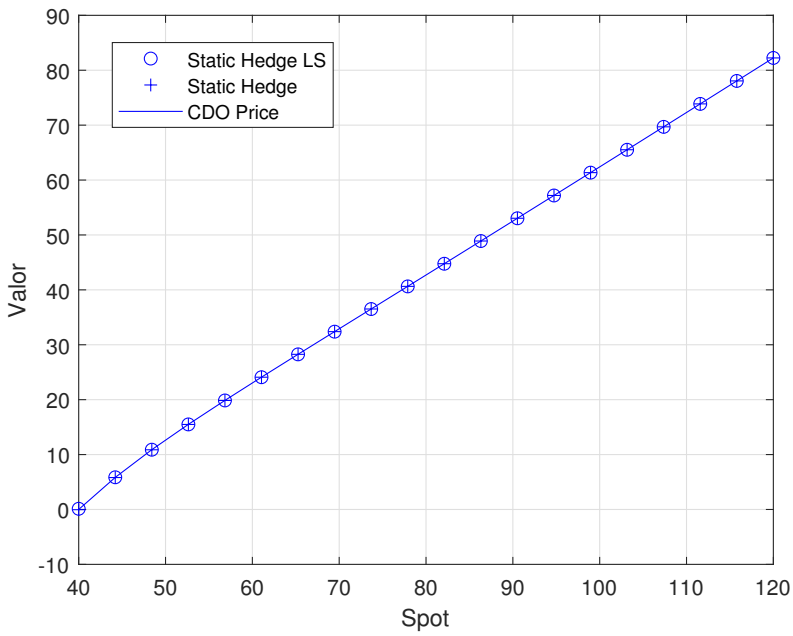

Figura 3: *Call-Down-and-Out.*

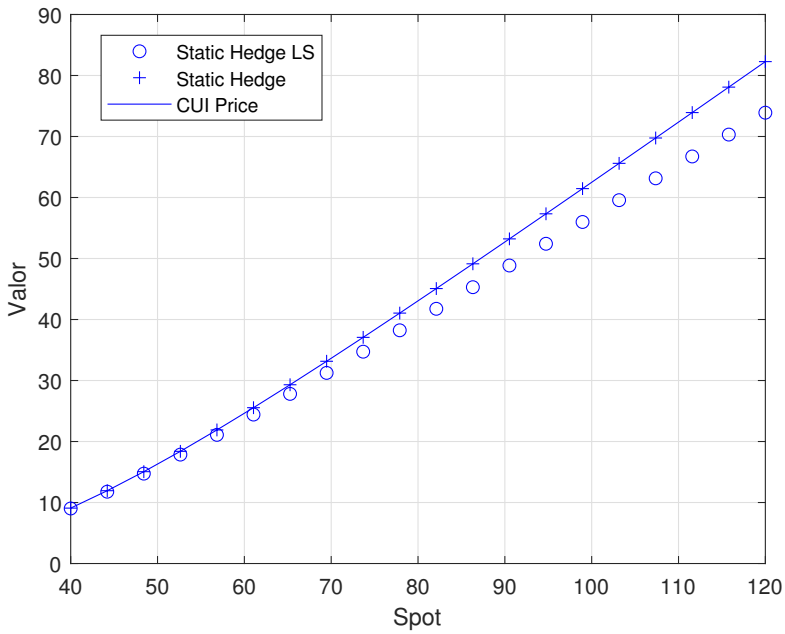

Figura 4: *Call-Up-and-In.*

Verifica-se que os valores de *hedge* obtidos pela estratégia de Albanese e Campolieti [1], Carr e Chou [2, 3] são praticamente idênticos aos valores das opções com barreira utilizando as equações de Reiner e Rubinstein [16], as quais se fundamentam no modelo de Black-Scholes. No caso das opções *call up-and-in (CUI)*, o *hedge* com regressão é ligeiramente inferior ao *hedge* estático para valores de *spot* mais altos (>60).

Para que o modelo de *hedge* estático de Carr e Chou, [2, 3] obtenha bons resultados, deve-se adotar um bom refinamento na discretização do somatório (conforme a equação (74c)). Assim, mostra-se na figura (5) que, no modelo de *hedge* estático, quanto maior a discretização (valor de n), os resultados do *hedge* serão mais próximos do valor da opção com barreira.

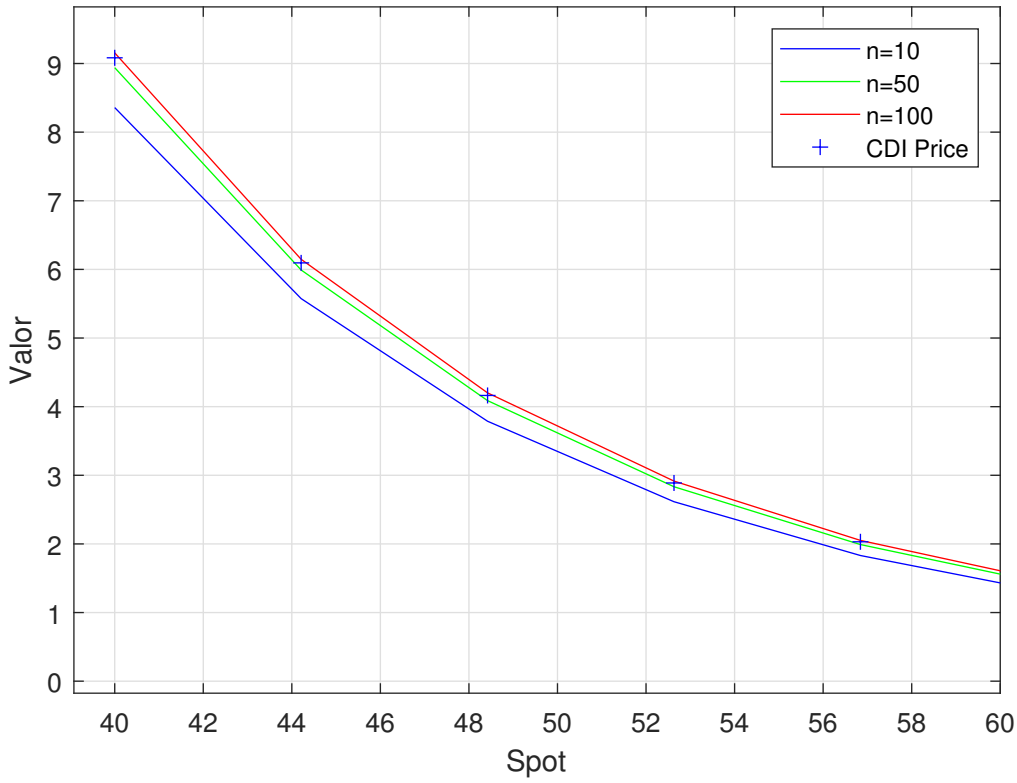

Figura 5: Influência da discretização no *hedge* estático.

Na figura (6), a análise sobre o *spot* é repetida, mas agora combinando com o prazo de vencimento da operação (T), de 0,5, 1 e 2 e 3 anos, obtendo-se a figura (6). Vê-se que quanto maior o prazo ao vencimento (linha ciano), maiores os valores das opções e do *hedge*. Isto ocorre porque, em primeiro lugar, para as opções do tipo *call-in*, à medida que o *spot* se aproxima do valor da barreira (no exemplo, a barreira está em 40), maior a chance de ativação da opção *call vanilla* e, consequentemente, maior o valor da opção de barreira. Em segundo, uma opção in tem uma relação direta entre volatilidade do ativo-base e o preço do derivativo. De fato, em prazos maiores há mais tempo para o ativo executar trajetórias, e há mais volatilidade; ambos fatores que aumentam a chance de toque da barreira, o que se traduz em preços mais elevados para a opção com cláusula *in*. Por fim, na mesma figura, observa-se ainda que para tempos de expiração inferiores a 1 ano, o *hedge* estático com regressão fornece resultados ligeiramentes diferentes do *hedge* estático.

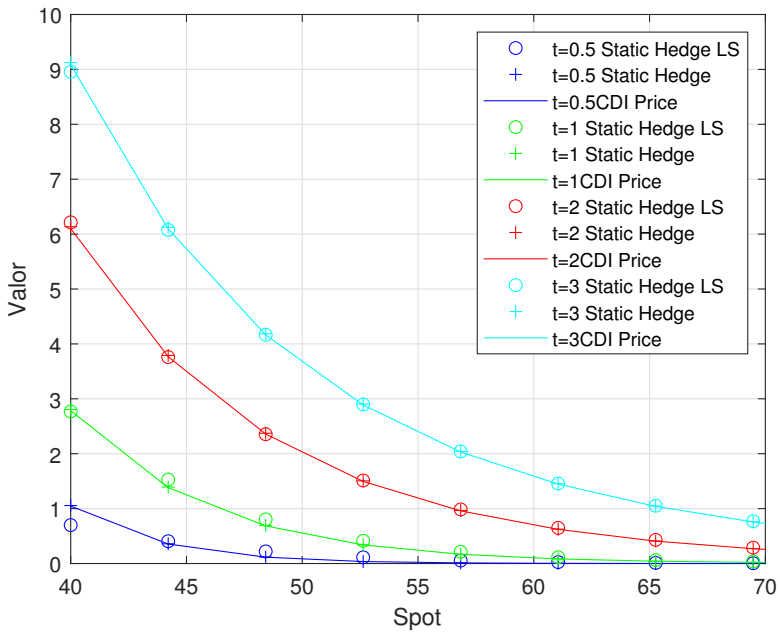

Figura 6: Variação do valor da opção em função do *spot* e tempo

A partir de agora, é estudado o desbalanceamento das metodologias de *hedge* sob as variações do *spot,* da volatilidade, da taxa de juros e do decaimento do tempo de expiração de uma opção, a partir de dados iniciais: (i) *spot* de 603, (ii) taxa de juros de 7%, (iii) volatilidade igual a 15% e (iv) tempo de expiração de 140 dias.

Considerando uma *call down-and-out*, com barreira de 450 e *strike* de 350 $(K < H)$, a figura (7) apresenta o comportamento do *hedge* e o preço da opção com barreira sob a influência da variação das quatro variavéis em análise. Verifica-se que o *hedge* estático (com ou sem regressão) aproxima-se muito do preço da opção com barreira quando se varia o *spot*, a taxa de juros e subtraímos o tempo ao vencimento. Entretanto, ao variar a volatilidade, nota-se que para variações acima de 4%, o valor do *hedge* começa a diminuir mais do que o preço da opção com barreira, sendo que o *hedge* estático com regressão apresenta uma redução mais acentuada.

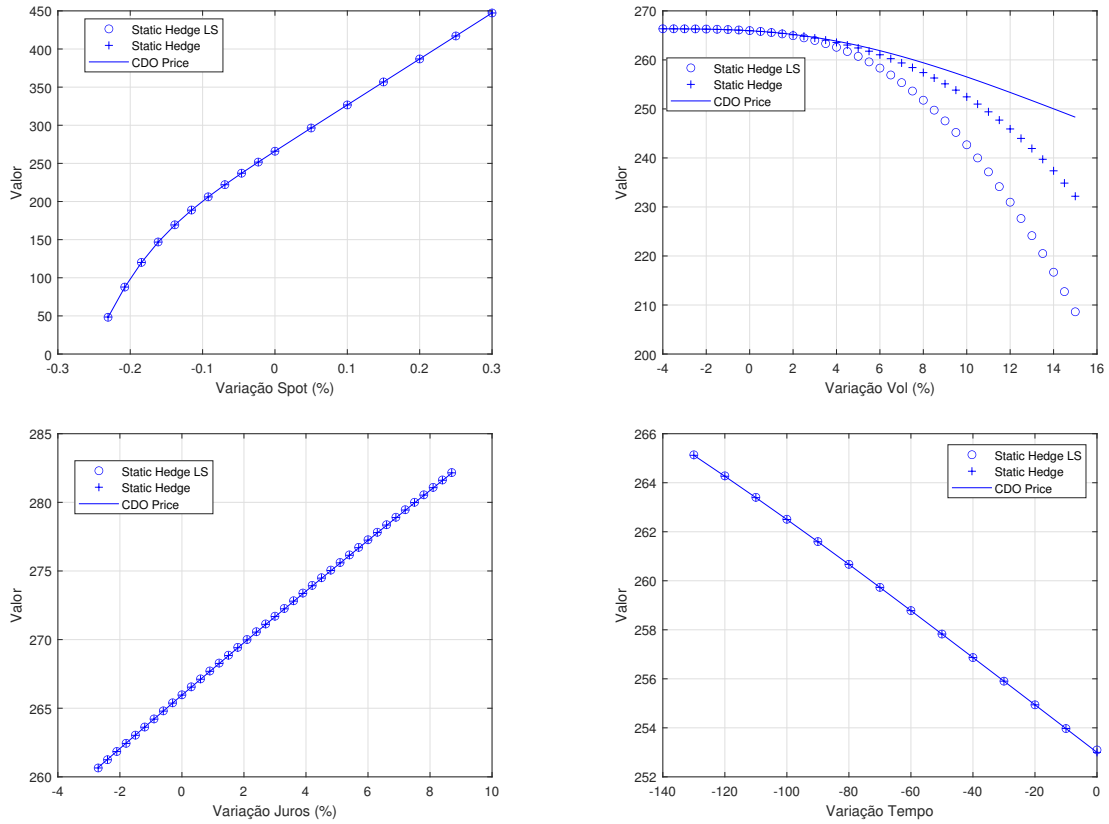

Figura 7: CDO com barreira de 450 e *strike* de 350.

Com os mesmos dados, agora para uma opção *call down-and-in*, como se pode observar na figura (8), ao variar o *spot* e o tempo ao vencimento, os valores dos *hedges* mantêm-se bastante próximos ao valor de apreçamento da opção. Ao diminuir (aumentar) a taxa de juros, o valor do *hedge* é ligeiramente superior (inferior) ao valor da opção com barreira. Para variações de volatilidade superiores a 4%, os valores dos *hedges* tornam-se superiores ao valor da opção, sendo mais acentuado no caso do *hedge* com regressão em relação ao *hedge* estático à medida que a volatilidade aumenta.

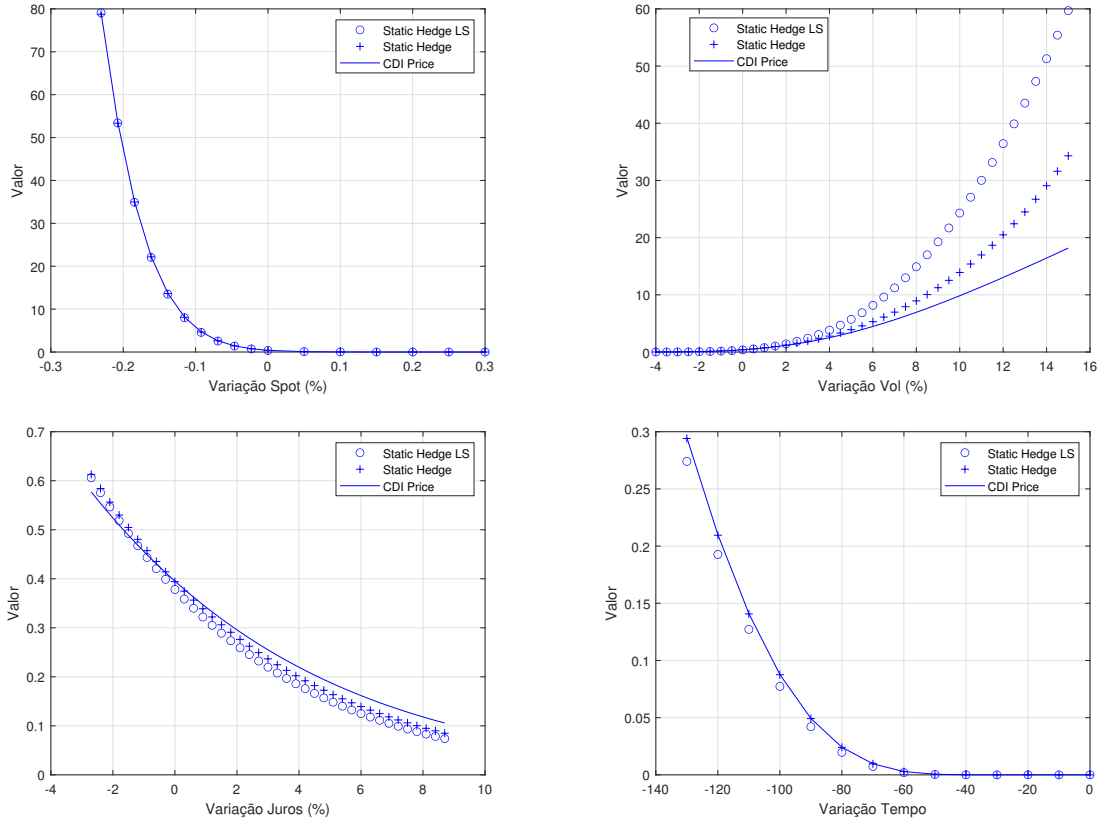

Figura 8: CDI com barreira de 450 e *strike* de 350.

Considerando agora o caso $K > H$, um *strike* de 500, para as opções do tipo *call down-and-out*, a figura (9) aponta somente descolamento dos *hedges* estáticos para variações de volatilidade, na região acima de 8% de variação, sendo que o *hedge* por regressão apresenta distorção leve e para cima do valor da opção, enquanto que no *hedge* estático a distorção é para baixo, e mais pronunciada à medida que as variações na volatilidade aumentam. Já no caso *call down-and-in*, a figura (10) aponta distorções dos hedges tanto em variações de volatilidade a partir de 6%, sendo que agora o valor do *hedge* por regressão torna-se inferior ao valor da opção, enquanto o *hedge* estático apresenta variações acima da mesma. Aqui também o *hedge* estático está associado às maiores distorções.

Assim como no caso das opções *call down-and-in* com $K < H$, o caso análogo para $K > H$ também apresenta problemas com os *hedges* quando os juros variam. Contudo, desta vez, o *hedge* estático sofreu maiores variações, em qualquer sentido de variação dos juros.

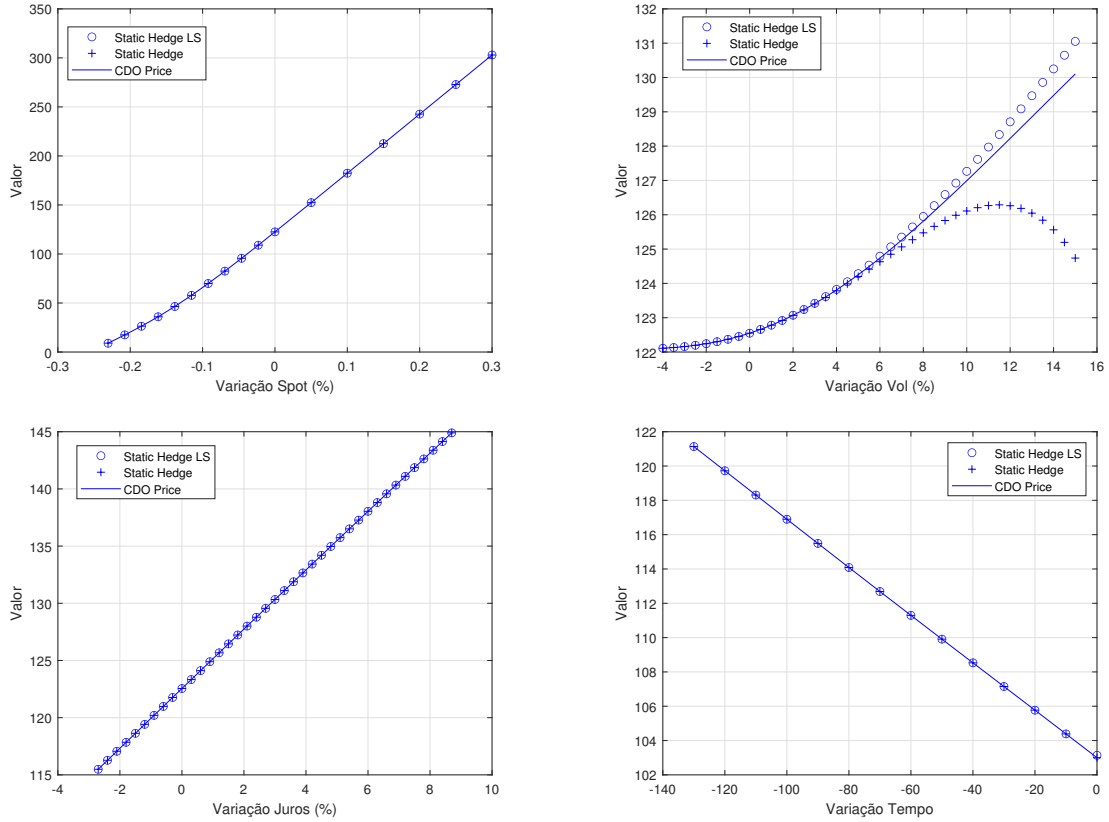

Figura 9: CDO com barreira de 450 e *strike* de 500.

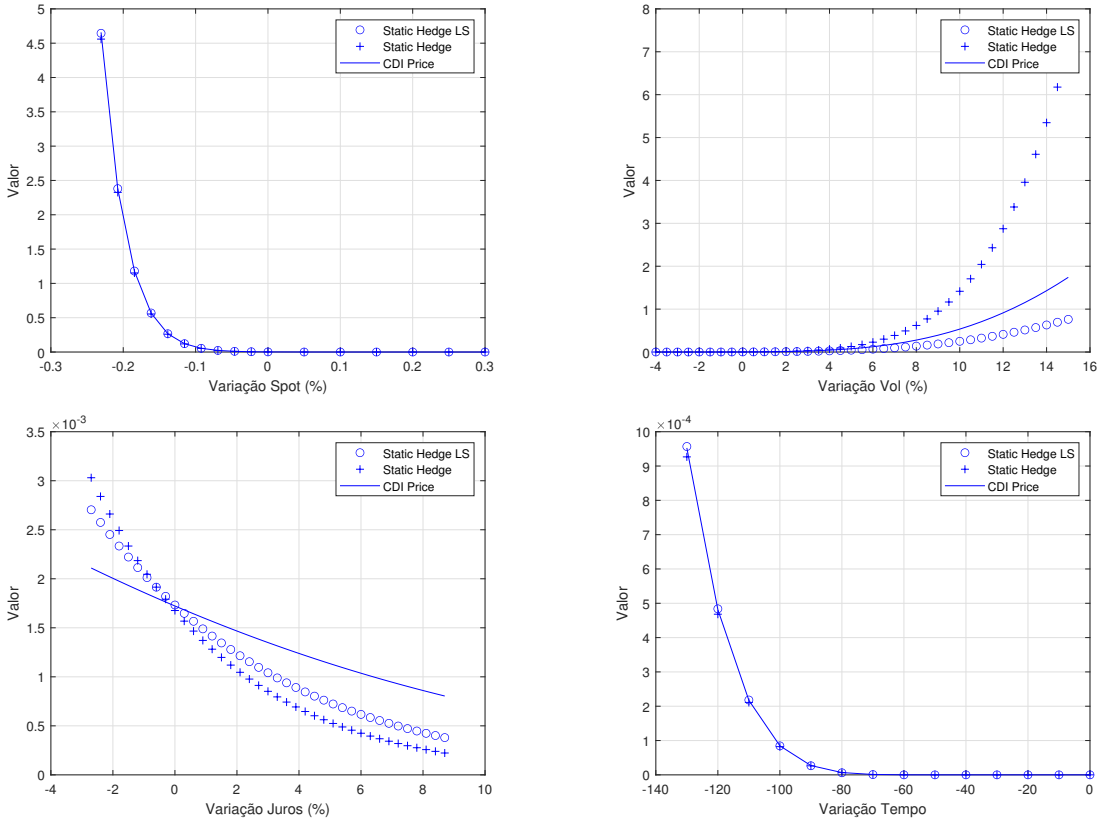

Figura 10: CDI com barreira de 450 e *strike* de 500.

No caso de uma opção *call up-and-out,* com *strike* igual a 550 e barreira 780 $(K < H)$, as variações do *spot*, da volatilidade, dos juros e do tempo de expiração estão apresentados na figura (11). Nota-se que há discrepância entre os *hedges* e o valor da opção quando se varia a volatilidade e a taxa de juros. Ao variar a volatilidade acima de 4%, o *hedge* estático com regressão torna-se menor que o valor da opção, enquanto que para variações de volatilidades acima de 6%, o *hedge* estático fica ligeiramente superior ao valor da opção com barreira. Em relação à variação da taxa de juros, para variações muito elevadas, o valor do *hedge* estático apresenta-se inferior ao valor da opção, sendo que o *hedge* com regressão possui valores mais baixos do que o *hedge* estático.

Resultados semelhantes são obtidos para uma *call up-and-in* com *strike* igual a 550 e barreira de 780 $(K < H)$, conforme os resultados da figura (12). No entanto, a distorção no *hedge* por regressão é pronunciada para cima. Essa inversão de comportamento para a distorção também é observada no caso de variações de taxas de juros: para variações superior a 4%, o valor do *hedge* estático apresenta-se superior ao valor da opção, sendo que o *hedge* com regressão possui valores mais elevados do que o *hedge* estático.

Essas inversões nos comportamentos das distorções são esperadas, pela paridade *in-out*.

O fato de uma opção *in* somada sua versão *out* resultar na *vanilla*, faz com que o comportamento apresentado para uma delas seja o oposto.

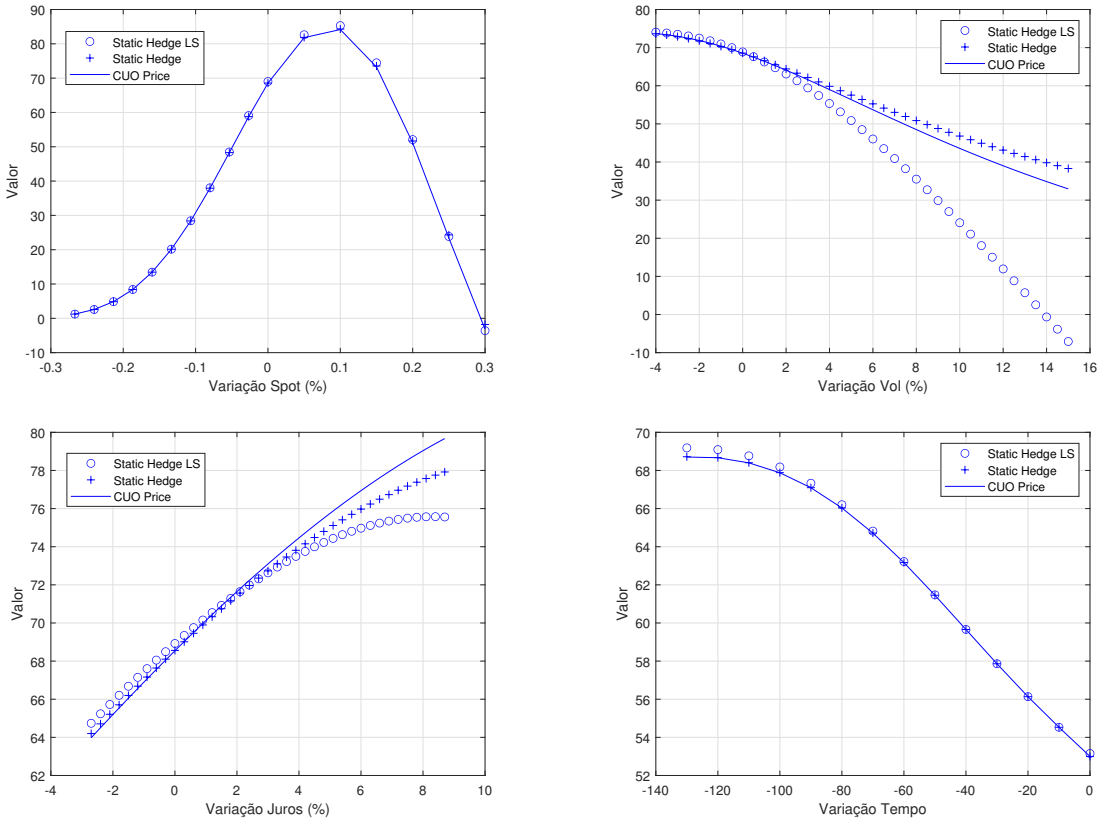

Figura 11: CUO com barreira de 780 e *strike* de 550.

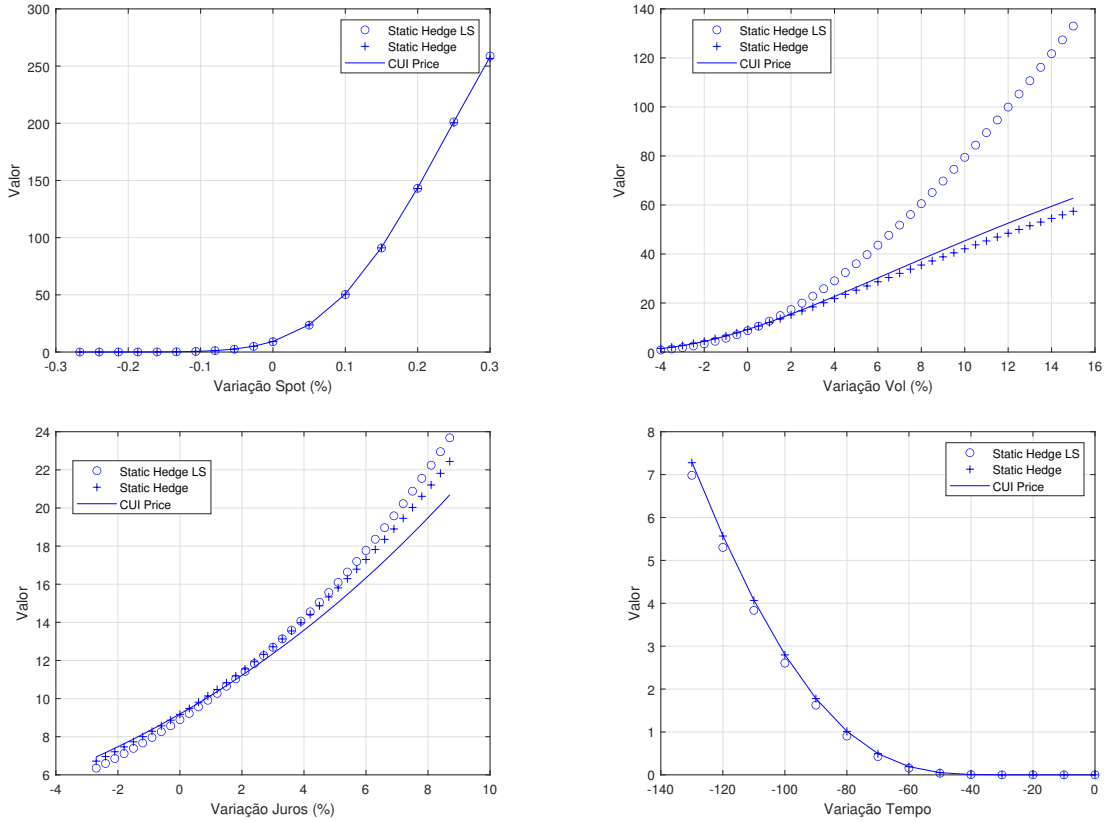

Figura 12: CUI barreira de 780 e *strike* de 550.

Por fim, realiza-se a análise de uma *call up-and-in* com *strike* igual a 820 e barreira de 780 *(K>H)*, as variações do *spot*, da volatilidade, dos juros e do tempo de expiração estão apresentados na figura 13. Nota-se que há discrepância somente entre o *hedge* com regressão e o valor da opção quando se varia a volatilidade e a taxa de juros. Ao variar a volatilidade acima de 4%, o *hedge* estático com regressão torna-se inferior que o valor da opção. Em relação à variação da taxa de juros, para variações superior a 4%, o valor do *hedge* apresenta-se inferior ao valor da opção.

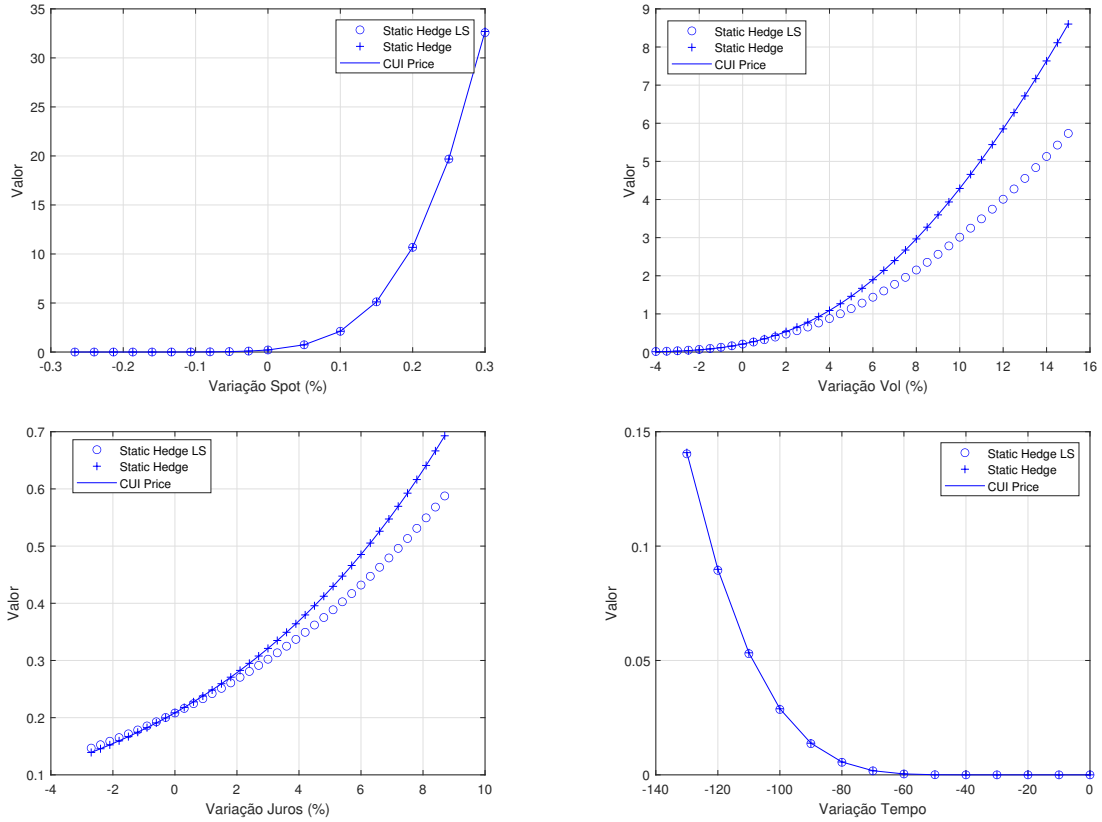

Figura 13: CUI barreira de 820 e *strike* de 550.

Cabe ressaltar que as discrepâncias que as técnicas podem apresentar sob variações de fatores de risco ocorrem na situação em que as quantidades calculadas nos portfolios de hedge são mantidas. Se houver recalibração dessas quantidades ao se variarem os fatores de risco, as imunizações apresentam excelentes resultados.

Analisando o caso de uma opção *call up-and-out,* cujo *strike* ($K = 750$) é *próximo* ao valor da barreira ($H = 780$), verifica-se uma maior discrepância quando se realiza o *hedge* com regressão em relação ao *hedge* estático e o valor de apreçamento, conforme mostra a figura (14). Esse tipo de efeito ocorre para as *knock-outs* em situação de desativação iminente, como é o caso descrito. Porém, os resultados do *hedge* estático (com ou sem regressão) para variações de *spot* convergem para o valor de apreçamento (e, portanto, protegendo o instrumento) ao aumentar o refinamento na discretização do somatório (conforme a equação (74c)) no caso do modelo de *hedge* estático de Carr e Chou, [2, 3] e, para o modelo de *hedge* estático com regressão [1], o número de opções de *strikes* próximo à barreira e, consequentemente, a discretização temporal, elevando o custo computacional. A variação do *spot* com elevados refinamentos pode ser observada na figura (15). Economicamente, a inclusão de mais opções no *portfolio* de *hedge*, via maior discretização, permite a melhor proteção quanto ao nível que o ativo ocupa, pois

haverá uma quantidade mais precisa de opções sendo exercidas de acordo com a necessidade para proteção frente à opção de barreira. Por outro lado, uma questão de ordem prática é que a constituição de uma carteira com muitas opções *vanillas* para garantir a precisão do *hedge* é inviável. Assim, embora o *hedge* estático obtido pelo teorema de Fubini possa parecer mais vantajoso pelo resultado, o de regressão acaba tornando-se o mais viável. Ademais, a situação do exemplo é um exercício de estresse, dado não é comum encontrar contratos onde o *strike* é próximo à barreira, uma vez que não é de interesse um investimento onde a chance de haver desativação é quase certa.

Já nos outros casos, relativos a juros, volatilidade e tempo, a discrepância advém da proximidade do *strike* à barreira e à possibilidade de haver desativação dalí para diante, pois a volatilidade está ligada à variabilidade experimentada pelo ativo e os juros, positivos, projetam o preço do ativo para cima, sendo que, em ambos os casos, seus efeitos podem ser tão maiores quanto maior o tempo para executar o caminho. Por isso, a descalibração do *hedge* ocorre com maior intensidade depois que mais tempo decorreu.

Assim, os resultados de calibração de hedge tendem a ser mais precisos, considerando as variáveis volatilidade e juros, quanto menores forem os seus valores. Equivalentemente, para a de tempo, quanto menor for o prazo para o vencimento. A figura (16) foi construída com volatilidade inicial de 5%, diferente do valor original de 15%. Vê-se que o descolamento começa a acontecer a partir de 6% de variação de volatilidade, e não mais a partir de 1%, como na figura (14). Isto sugere que correções de vega, rho e theta, que são as sensibilidades a volatilidade, juros e passagem do tempo, respectivamente, poderiam melhorar a qualidade do *hedge* nestes casos onde o contrato *out* é montado com a *barreira* próxima ao *strike*, principalmente na metodologia de *hedge* estático por regressão.

Em situações de grandes variações de juros e volatilidade, conforme as figuras (14) e (16), valores negativos são observados nos portfolios de hedge estático com regressão. Este efeito ocorre, conforme mencionado, devido à natureza extrema do exemplo, onde o *strike* é tomado próximo à barreira, fazendo com que o preço do derivativo a ser imunizado, por si só, seja próximo de zero. Então, uma carteira de *hedge*, como a obtida por regressão, tende a descalibrar mais rapida e fortemente, frente àquela obtida pelo teorema de Fubini, onde as características do modelo de barreira são incorporadas. Uma variação de 4% em volatilidade é bastante significativa para o derivativo e para a carteira de *hedge* nesta situação. Observa-se que, na direção oposta, de queda de -4% de volatilidade, ocorre aderência. Contudo, retomando o que já foi mencionado, o uso prático do modelo de regressão, representa uma vantagem frente

ao método via teorema de Fubini.

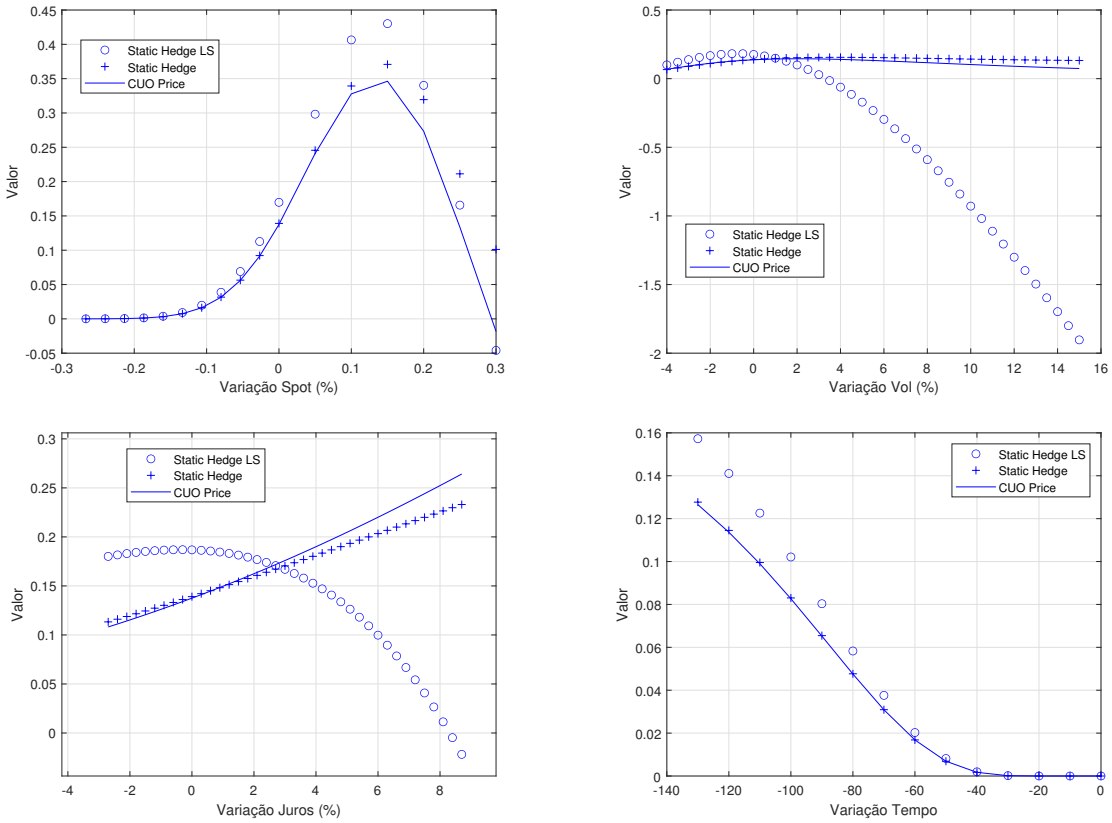

Figura 14: CUO barreira de 780 e *strike* de 750. Variação de fatores de risco *spot*, volatilidade, juros e tempo.

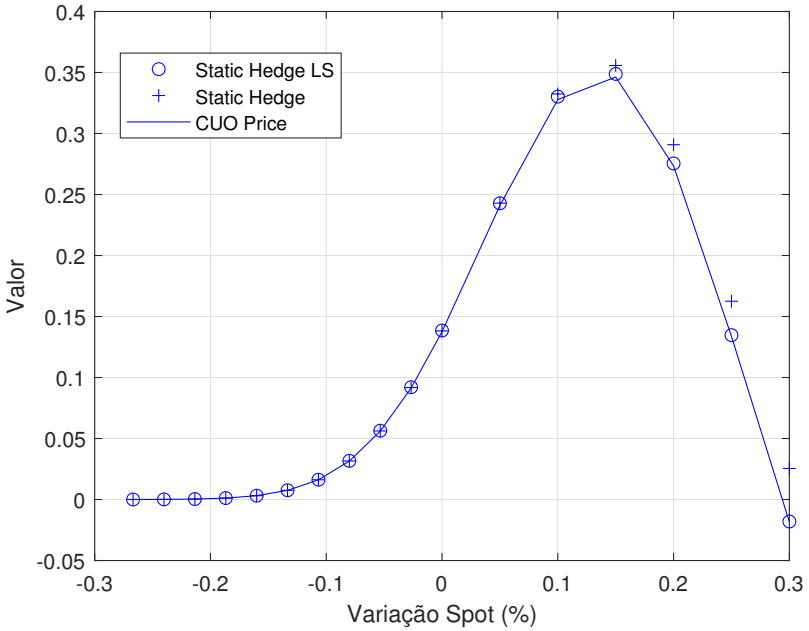

Figura 15: Variação do *spot* para a CUO barreira de 780 e *strike* de 750 quando se refina a discretização.

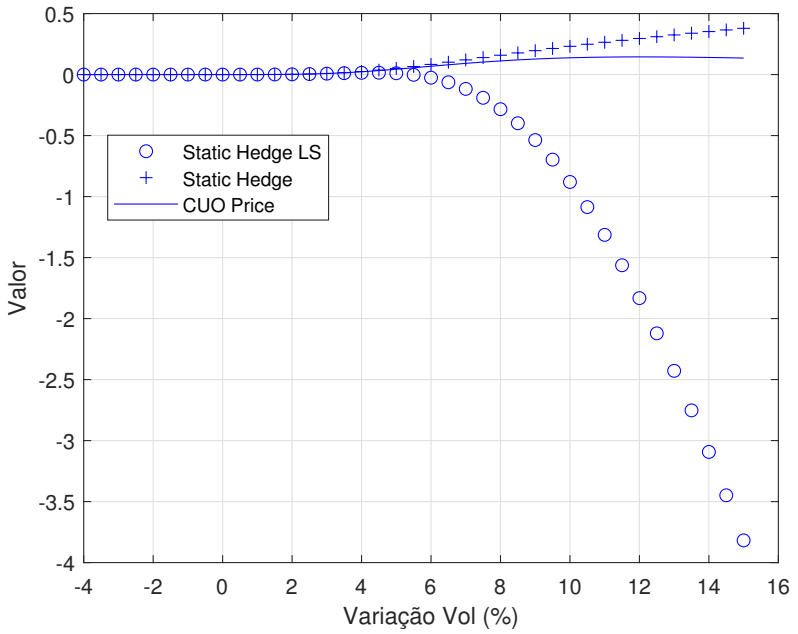

Figura 16: CUO barreira de 780 e *strike* de 750. Efeito de variação de volatilidade no *hedge* quando o nível volatilidade inicial é baixo.

4 CONCLUSÕES

No mercado financeiro é comum a negociação de ativos (ações) de empresas em bolsa de valores, com os mais diversos objetivos. Diferentemente do mercado à vista, existe o mercado de opções, onde não se negociam as ações-objeto, mas sim os direitos sobre elas. Estes direitos envolvem uma parte comprar, ou vender, à outra, até determinada data, certa quantidade de ações-objeto a um preço pré-estabelecido.

Por esses direitos, o titular da opção paga um prêmio, podendo exercê-lo até ou somente na data de vencimento do contrato da opção. O valor deste prêmio depende de vários fatores, tais como, o preço do ativo-objeto, prazo, taxa de juros e volatilidade. Um dos modelos mais conhecidos e utilizados para o apreçamento deste prêmio (valor da opção) é o modelo de Black e Scholes [6].

Porém, há um grupo de opções, conhecidas de opções exóticas, onde o preço da opção depende da trajetória do valor do ativo-objeto ao longo do tempo de vida do contrato da opção. Dentro desse grupo, existem as opções com barreira, cujo estudo foi o objetivo deste trabalho, em que o contrato é ativado ou desativado se o preço do ativo-objeto atingir um determinado valor (barreira).

Devido à incerteza de a barreira ser tocada, torna-se necessário a realização de mecanismos de proteção (*hedge*) da operação, pois ao emissor do contrato não interessa que o mesmo seja levado ao exercício, ou seja, interessa-lhe embolsar o prêmio negociado inicialmente. Desta forma, o *hedge* consiste na replicação do *payoff* de uma opção exótica por meio de opções mais simples (*plain vanillas*). No caso do *hedge estático*, as quantidades são determinadas inicialmente, e não são mais alteradas; enquanto no *hedge dinâmico* há recalibração intertemporal, o que pode significar maiores custos frente ao estático, em troca de melhor proteção.

Assim, o objetivo deste trabalho foi o estudo e a comparação de duas estratégias de *hedges* estáticos aplicados às opções com barreira. As estratégias implementadas foram extraídas de Albanese e Campolieti [1] e Carr e Chou [2, 3].

Nota-se que ambas estratégias apresentam boa aderência no apreçamento das opções de

compra (*call)* para os contratos de barreiras analisados.

Em relação a variações dos fatores de risco, tais como *spot*, taxa de juros e a volatilidade, observam-se certas distorções entre os valores de *hedge* e o valor da opção com barreira. Embora sob tais variações de fatores de risco os descolamentos do *hedge* frente ao preço do instrumento possam ser consideradas suportáveis, sob variações razoáveis desses fatores, observa-se que, sob grandes variações, o modelo de *hedge* estático usado em Carr e Chou [2, 3], na maior parte dos casos, apresenta melhor desempenho. Isto se deve ao fato da abordagem por eles empregada ser direcionada ao modelo de apreçamento do derivativo, ao passo que o modelo em Albanese e Campolieti [1] calibra o *hedge* de forma genérica, via regressão. Logo, embora essa abordagem seja mais prática, o resultado, comparativamente àquela que se vale do modelo tomado como verdadeiro, pode levar a pior resultado. Mas, novamente, isto ocorre sob variações de fatores de risco que podem até não serem razoáveis de se encontrar no mercado durante a vida do contrato. E, talvez, quando tomados preços no mercado, onde não se conhece o modelo que rege os preços, a construção de hedge pela metodologia proposta em Albanese e Campolieti [1] seja superior à tradicional, empregada por Carr e Chou [2, 3]. Ademais, há situações que essas distorções podem ser corrigidas com a recalibração das quantidades das opções *vanillas* calculadas nos portifólios de *hedge*. Novamente, essa necessidade torna-se mais evidente quando se utiliza o modelo de *hedge* estático com regressão proposto por Albanese e Campolieti [1].

Ainda no tocante às distorções que possam aparecer sob variações de fatores de risco no transcorrer da vida do *hedge*, a relativa ao *spot* está associada à posição do mesmo frente ao *strike* e à barreira. As distorções podem ser bastante reduzidas, dando conta até de variações extremas do *spot*, quando se discretiza suficientemente o portfolio de *hedge*, tanto no caso de Albanese e Campolieti [1], quanto no de Carr e Chou [2, 3]. Já aquelas distorções relativas à variação de juros, volatilidade e passagem do tempo, principalmente no caso de Albanese e Campolieti [1], provavelmente dependem de inclusão de contratos de opções, cujas quantidades seriam determinadas via sensibilidades aos fatores de risco volatilidade (vega), juros (rho) e tempo (theta).

Quanto à utilização prática das duas metodologias, a de Albanese e Campolieti [1] permite que sejam incluídos ativos vanillas disponíveis no mercado, enquanto a metodologia de Carr e Chou [2, 3] requer uma carteira por vezes bastante discretizada, o que significa investimentos em *strikes* de opções indisponíveis. Então, embora a precisão seja teoricamente possível, na prática ela possa não ser alcançada neste caso.

Diante disso, como sugestão de trabalhos futuros recomenda-se: (i) estender as estratégias de *hedge* estáticos para as opções de venda (*puts*), (ii) melhoria do modelo de Albanese e

Campolieti [1] com a inclusão de mais componentes para fazer uso de sensibilidades aos fatores de risco de volatilidade, juros e passagem do tempo, (iii) estudo de estratégias dinâmicos e hibridos para as opções com barreira e (iv) avaliação das estratégias de *hedge* para outros tipos de opções exóticas.

REFERÊNCIAS

1 ALBANESE, C.; CAMPOLIETI, G. *Advanced Derivatives Pricing and Risk Management - Theory, Tools, and Hands-on Programming Applications*. 1. ed. USA: Elsevier Academic Press, 2006.

2 CARR, P.; CHOU, A. Breaking barries. *Risk Magazine*, v. 10, n. 9, p. 139–145, 1997.

3 CARR, P.; CHOU, A. Hedging complex barrier options. *Working Paper*, p. 1–28, 2002.

4 HULL, J. C. *Opções, Futuro e outros Derivativos*. 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2016.

5 NASCIMENTO, W. L. *Hedge em Carteiras de Opções Exoticas*. Tese (Doutorado) — Fundação Getulio Vargas - Escola de Economia de São Paulo, 2015.

6 BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.

7 MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, v. 4, p. 141–183, 1973.

8 TALEB, N. N. *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*. 1. ed. USA: John Wiley and Sons, Inc., 1997.

9 NALHOLM, M.; POULSEN, R. Static hedging and model risk for barrier options. *Journal of Futures Markets*, v. 26, p. 449 – 463, 05 2006.

10 ENGELMANN, B. et al. Static versus dynamic hedges: An empirical comparison for barrier options. *Review of Derivatives Research*, v. 9, p. 239–264, 02 2006.

11 ITO, K. Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, v. 20, p. 519–524, 1944.

12 CHOUDHURY, A. A simple approximation to the area under standard normal curve. *Mathematics and Statistics*, v. 2, p. 147–149, 2014.

13 HEYNEN, R. C.; KAT, H. M. Crossing barries. *Risk Magazine*, v. 7, n. 6, 1994.

14 WEICHERT, M. A.; LEMGRUBER, E. F. Opções com barreira: O mercado e capaz de avalia-las corretamente? In: *Encontro Nacional da ANPAD*. [S.l.: s.n.], 2002.

15 WILMOTT, P. *Introduces quantitative finance*. 1. ed. USA: John Wiley and Sons, Inc., 2001.

16 REINER, E.; RUBINSTEIN, M. Breaking down the barries. *Risk Magazine*, v. 4, n. 8, p. 28–35, 1991.

17 SHREVE, S. E. *Stochastic Calculus for Finance II - Continuous-Time Models*. 1. ed. USA: Springer Finance Series, 2004.

18 CARR, P.; ELLIS, K.; GUPTA, V. Static hedging of exotic options. *The Jounal of Finance*, v. 53, n. 3, p. 1165–1190, 1998.

19 ARKFEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Pysicists: A Comprehensive Guide*. 7. ed. USA: Elsevier, 2013.